Peter Bernhard:

KOMPAKTKURS FORMALE LOGIK

Die Logik muss für sich selber sorgen.
Ludwig Wittgenstein

Inhalt

1 Aussagenlogik

1.1 Logik als Theorie formal gültiger Schlüsse

Glauben Sie, dass Sie gerade ein Lehrbuch für formale Logik lesen? Wenn ja, warum? Können Sie Gründe dafür angeben?

Auf den folgenden Seiten wird die formale Logik als eine Theorie über das folgerichtige Argumentieren entwickelt. Argumente sind sprachliche Gebilde, die dazu verwendet werden, eine Meinung kundzutun unter gleichzeitiger Angabe der Gründe. Beispiele für Argumente sind etwa:

– „Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck ‚formale Logik', außerdem enthält es jede Menge logischer Formeln, also ist es ein Lehrbuch für formale Logik."

– „In der Einleitung dieses Buches wird behauptet, dass es sich um ein Lehrbuch für formale Logik handelt. Daraus folgt: Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik."

Argumente werden in der Logik auch als *Schlüsse* bezeichnet. Die Aussage, für die dabei versucht wird zu argumentieren, nennt man *Konklusion* und die dafür angeführten Gründe *Prämissen*.[1] In der Logik versteht man also unter einem Schluss eine Folge von Aussagen, die sich in Prämissen und eine Konklusion einteilen lassen. Im Gegensatz dazu wird in der Umgangssprache unter einem Schluss häufig auch eine Konklusion allein verstanden. Der besseren Übersicht wegen empfiehlt es sich, jede Prämisse und die Konklusion eines Schlusses in einzelne Zeilen untereinander zu schreiben. Das erste der oben angeführten Argumente erhält somit die folgende Gestalt:

Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik".
Dieses Buch enthält jede Menge logischer Formeln.
___
Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Der Strich trennt die Prämissen und die Konklusion *graphisch* voneinander, so dass ersichtlich wird, was das eine und was das andere ist. *Verbal* kann dies mit bestimmten Wörtern verdeutlicht werden. Um eine Prämisse anzuzeigen, eignen sich beispielsweise die Ausdrücke „denn", „nun", „nämlich", „doch", „schließlich", „weil" oder „da". Noch mehr Wörter stehen im Deutschen

[1] Die Etymologie dieser Wörter ist für deren Verständnis durchaus hilfreich: „Prämisse" stammt vom lateinischen „praemissum", was „das Vorausgeschickte" bedeutet, während „Konklusion" vom lateinischen „conclusio" stammt, was „Zusammenfassung" heißt.

zur Kenntlichmachung einer Konklusion zur Verfügung, etwa „also“, „folglich“, „daher“, „demnach“, „infolgedessen“, „so dass“, „deswegen“, „mithin“, „somit“, „demzufolge“, „darum“ oder „ergo“. Ihrer Funktion entsprechend, bezeichnet man diese Partikel als *Konklusions-* bzw. *Prämissenindikatoren*.[2] Nicht in jedem Schluss kommen Indikatoren vor, d. h. man kann Schlüsse auch ganz ohne diese Signalwörter formulieren. Außerdem können diese Wörter auch dort auftreten, wo gar kein Schluss vorliegt. Indikatoren bieten also nur eine kleine Hilfestellung beim Erkennen von Schlüssen.

Logik ist eine Theorie des Schließens (oder Schlussfolgerns), genau genommen des *folgerichtigen* Schließens, d. h. die Logik ist ein Instrument, um zu erklären, wann der Übergang von Prämissen zu einer Konklusion gerechtfertigt ist und in welcher Hinsicht dieser Übergang gerechtfertigt ist. Erfolgt dieser Übergang zwingend notwendig, so ist er Gegenstand der *deduktiven* Logik, erfolgt er nur mit einem gewissen Grad an Wahrscheinlichkeit, so ist er Gegenstand der *induktiven* Logik. Wir werden uns ausschließlich mit der *deduktiven* Logik befassen, so dass die Ausdrücke „Logik“ und „deduktive Logik“ hier synonym verwendet werden.

Vom Standpunkt der deduktiven Logik lautet also die uns interessierende Frage hinsichtlich des oben angeführten Schlusses: Folgt diese Konklusion *zwingend* aus den angeführten Prämissen? Offensichtlich nicht, denn es ist vorstellbar, dass sich die Konklusion trotz der angeführten Gründe als falsch herausstellt. So könnte ich mir ja einfach einen schlechten Scherz erlaubt haben oder ich könnte zwar der Meinung sein, ein Lehrbuch der formalen Logik verfasst zu haben, jedoch nicht wissen, was Logik eigentlich ist (ein zugegebenermaßen komplizierter Fall, aber ich denke, dass er nicht zutrifft). D. h. der Schluss könnte auf eine Weise erweitert werden, durch die die Konklusion zumindest zweifelhaft würde:

Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik“.
Dieses Buch enthält jede Menge logischer Formeln.
Der Autor dieses Buches hat sich einen schlechten Scherz erlaubt.
____
Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Einen Schluss, der erst durch die Ergänzung einer oder mehrerer Prämissen zwingend gültig wird, bezeichnet man als *Enthymem*.[3] Der weiter oben angeführte Schluss ist offensichtlich ein Enthymem. Wie könnte nun dieses Enthymem ergänzt werden, so dass die Konklusion mit absoluter Sicherheit aus den Prämissen folgt? Eine Möglichkeit wäre z. B. die Anfügung folgender Prämisse: „Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik“. Der Schluss würde dann wie folgt lauten:

[2] Vom lateinischen „indicare“, was „anzeigen“ bedeutet.

[3] Das Wort „Enthymem“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet u. a. „das Zurückbehaltene“, was die Sache ganz gut trifft, da hier ja nicht alle Prämissen explizit genannt werden.

> Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik.
> Dieses Buch trägt im Titel den Ausdruck „formale Logik“.
> Dieses Buch enthält eine Menge logischer Formeln.
> ———
> Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

In diesem Falle würden bereits die erste und die dritte Prämisse genügen, um die Konklusion behaupten zu können:

> Wenn dieses Buch eine Menge logischer Formeln enthält, dann ist es ein Lehrbuch für formale Logik.
> Dieses Buch enthält eine Menge logischer Formeln.
> ———
> Dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik.

Was die Gültigkeit dieses Schlusses über alle Zweifel erhaben macht, ist seine *Form*. D. h., wenn man eine Aussage der Form „Wenn p, dann q“ behauptet und eine weitere Aussage der Form „p“, dann ist man zweifellos berechtigt, auch eine Aussage der Form „q“ zu behaupten, was sich folgendermaßen darstellen lässt:

> Wenn p, dann q
> p
> ———
> q

In diesem Schluss steht p für die Aussage, dass das vorliegende Buch eine Menge logischer Formeln enthält, und q steht für die Aussage, die der Satz „dieses Buch ist ein Lehrbuch für formale Logik“ zum Ausdruck bringt. Für die Frage nach der Korrektheit dieses Schlusses spielt es jedoch keine Rolle, für welche konkreten Aussagen p und q stehen. Da es dabei nur auf *die Form* des Schlusses ankommt, bezeichnet man den obigen Schluss als *formal gültig*. Dass die formale Gültigkeit eines Schlusses unabhängig davon ist, wofür die darin vorkommenden Aussagen stehen, bedeutet, dass diese Aussagen auch falsch sein können, was im obigen Fall ja durchaus denkbar ist. So ist auch der folgende Schluss korrekt, da er dem formal gültigen Schema von oben entspricht:

> Wenn München an der Nordsee liegt, dann hat es einen Hafen.
> München liegt an der Nordsee.
> ———
> München hat einen Hafen.

Eine mittels „wenn–dann“ gebildete Aussage bezeichnet man in der Logik als *Subjunktion*[4] und der darin vorkommende Subjunktionsausdruck „wenn–

[4] Auch „Konditional“ oder „(materiale) Implikation“ genannt.

dann“ als einen *Junktor*.[5] Für die leichtere Handhabbarkeit der Junktoren empfiehlt es sich, diese mit Hilfe eigener Symbole darzustellen. Symbolisiert man den Junktor „wenn– dann“ durch einen Pfeil, so kann man den obigen Schluss auch so darstellen:

$$\begin{array}{l} \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \\ \underline{\mathrm{p} \qquad\quad} \\ \mathrm{q} \end{array}$$

Das Vorderglied einer Subjunktion, hier die Aussage p, wird auch als „Antecedens“ und das Hinterglied (hier q) auch als „Succedens“ bezeichnet. Der Ausdruck „wenn– dann“ ist in der Logik standardisiert, d. h. jede formgleiche Aussage der Umgangssprache wird mit eben diesem Ausdruck wiedergegeben. Insofern bildet diese Standardisierung eine Einschränkung gegenüber den Ausdrucksmöglichkeiten der Umgangssprache und ist in gewisser Weise das Ergebnis einer Interpretation. In vielen Fällen ist dies unproblematisch, da sich die Mehrheit einer Sprachgemeinschaft meist darüber einig ist, welcher Satz welche Aussage zum Ausdruck bringt. So entsprechen die folgenden Aussagen in der Logik alle einem „Wenn p, dann q“:

- „Wenn er es lange genug sucht, so wird er es finden.“
- „Im Winter schneit es.“
- „Sollte er es wissen, wird er kommen.“
- „Es wird glatt, falls es noch kälter wird.“

Da verschiedene Formulierungen der Umgangssprache mit demselben Junktor ausgedrückt werden und von der Bedeutung dieses Junktors die Gültigkeit bestimmter Schlüsse mit abhängt, ist jede Standardisierung zugleich eine *Normierung*. Insofern kann die Logik als Theorie des normierten, d. h. regelgeleiteten Gebrauchs bestimmter Junktoren verstanden werden.

1.1.1 Regeln für den Gebrauch von Junktoren

Auf welche Weise ist nun der Gebrauch des Junktors „wenn–dann“ in der Logik normiert? Betrachten wir dazu noch einmal den obigen Schluss. Für eine bessere Bezugnahme nummerieren wir die einzelnen Zeilen:

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \\ (2) & \mathrm{p} \\ \hline (3) & \mathrm{q} \end{array}$$

[5] Der Ausdruck „Junktor“ stammt vom lateinischen „iungere“, was u. a. „verbinden“ oder „vereinigen“ bedeutet. In der Tat werden ja durch den Ausdruck „wenn– dann“ zwei Aussagen miteinander zu einer neuen, zusammengesetzten Aussage verbunden.

Die beiden Aussagen in den Zeilen (1) und (2) bilden die Prämissen für die Konklusion in Zeile (3). Wenn wir jede Prämisse mit einem „A“ kennzeichnen („A“ wie „Annahme“), dann können wir auf den Strich, der ja die Prämissen von der Konklusion trennt, verzichten:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	p	A
(3)	q	

Unsere Frage nach dem normierten Gebrauch des Subjunktionsausdrucks lässt sich nun folgendermaßen beantworten: Wenn man eine Subjunktion $p \rightarrow q$ und eine weitere Aussage p behauptet, dann ist man auch berechtigt, die Aussage q zu behaupten, oder etwas kürzer: Unter der Annahme, dass „$p \rightarrow q$“ und „p“, gilt auch „q“. Da diese Regel es erlaubt, die Subjunktion von Zeile (1) „aufzulösen“, bezeichnet man sie als Regel der *Subjunktionsbeseitigung* und symbolisiert die Anwendung dieser Regel mit „→B“. Der obige Schluss erhält nun folgende Gestalt:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	p	A
(3)	q	→B

Die Regel der Subjunktionsbeseitigung ist natürlich auch in komplexeren Zusammenhängen erlaubt:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	r	A
(3)	p	A
(4)	s	A
(5)	q	→B

Um auch hier sofort sehen zu können, aufgrund welcher Aussagen die Regel angewendet wurde, fügt man dem Symbol für die Subjunktionsbeseitigung noch die Nummern derjenigen Zeilen hinzu, in denen die beteiligten Aussagen stehen, in diesem Falle also 1 und 3:

(1)	$p \rightarrow q$	A
(2)	r	A
(3)	p	A
(4)	s	A
(5)	q	→B,1, 3

Der Ausdruck „und“ bildet ebenfalls einen Junktor. Wie im Falle von „wenn–dann“ verbindet auch dieser Junktor zwei Aussagen, z. B. p und q miteinander, so dass eine neue Aussage „p und q“ entsteht. Einen Ausdruck der Form „p und q“ bezeichnet man in der Logik als *Konjunktion* und symbolisiert den darin vorkommenden Ausdruck „und“ mit dem Zeichen „$\wedge$“. Wie für den Gebrauch von Subjunktionen gibt es auch für den Gebrauch von Konjunktionen eine Regel, die angibt, auf welche Weise sie sich in einer Argumentation beseitigen lassen. Die Regel der *Konjunktionsbeseitigung* (nachfolgend durch „$\wedge$B“ symbolisiert) normiert das intuitive Verständnis, dass jemand, der eine Konjunktion behauptet, auch berechtigt ist, ein beliebiges einzelnes Konjunktionsglied dieser Konjunktion zu behaupten. Folgende Schlüsse sind also formal gültig:

$$\frac{\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}}{\mathrm{p}} \qquad \frac{\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}}{\mathrm{q}}$$

Für die Regel der Konjunktionsbeseitigung gibt es demnach zwei Varianten:

I)	(1)	p $\wedge$ q	A	II)	(1)	p $\wedge$ q	A
	(2)	p	$\wedge$B,1		(2)	q	$\wedge$B, 1

Wie „wenn–dann“, so bildet auch die Wendung „und“ eine standardisierte Formulierung in der Logik, so dass z. B. folgende Aussagen der Umgangssprache mit „p und q“ wiedergegeben werden:

- „Dieses Buch enthält Formeln und ist ein Lehrbuch für formale Logik.“
- „Es war bereits Frühling, aber es schneite.“
- „Sie ging groß Essen, obwohl sie kaum noch Geld hatte.“
- „In diesem Hotel gibt es sowohl Einbett- als auch Doppelzimmer.“

1.1.1.1 Das Notieren der Voraussetzungen

Betrachten wir folgenden Schluss: „Wenn Aristoteles die *Analytica Priora* schrieb, dann kann er als der Begründer der formalen Logik gelten. Aristoteles schrieb die *Analytica Priora* und Boethius schrieb *De consolatione philosophiae*. Also schrieb Aristotels die *Analytica Priora*. Somit kann Aristoteles als der Begründer der formalen Logik gelten.“

Notiert man „a“ für die Aussage des Satzes „Aristoteles schrieb die *Analytica Priora*“, „b“ für die Aussage des Satzes „Boethius schrieb *De consolatione philosophiae*“ und „f“ für „Aristoteles kann als der Begründer der formalen Logik gelten“, so erhält der obige Schluss folgende Form:

(1)	a $\rightarrow$ f	A
(2)	a $\wedge$ b	A
(3)	a	$\wedge$B, 2
(4)	f	$\rightarrow$B, 1, 3

Da sich die Subjunktionsbeseitigung in Zeile (4) auf die Aussagen der Zeilen (1) und (3) bezieht, scheint die Konklusion von den Annahmen „a → f“ und „a“ abzuhängen. Tatsächlich ist dies jedoch nur indirekt der Fall, da die Aussage „a“ in Zeile (3) selbst wieder abhängt von der Annahme in Zeile (2). Um die Abhängigkeitsverhältnisse auch in komplexeren Zusammenhängen stets unzweideutig bestimmen zu können, notiert man vor jede Zeile die Nummern derjenigen Zeilen, von denen die Aussage der betreffenden Zeile abhängt. So hängt im obigen Beispiel das a in Zeile (3) von der Konjunktion in Zeile (2) ab, da es ja *aufgrund* dieser Konjunktion gilt. Zeile (3) erhält demnach folgende Gestalt:

2	(3)	a	∧B, 2

Da die Aussage in Zeile (4) mit Hilfe der Aussage in Zeile (3) gebildet wird und die Aussage in Zeile (3) von der Aussage in Zeile (2) abhängt, muss auch die Aussage in Zeile (4) von der Aussage in Zeile (2) abhängen:

2	(4)	f	→B, 1, 3

Die Aussage in Zeile (4) hängt aber auch noch von der Aussage in Zeile (1) ab. Da die Aussage in Zeile (1) eine Annahme bildet, hängt sie trivialerweise von keiner anderen Aussage außer von sich selbst ab. Der gesamte Schluss hat also die folgende endgültige Gestalt:

1	(1)	a → f	A
2	(2)	a ∧ b	A
2	(3)	a	∧B, 2
1,2	(4)	f	→B, 1, 3

Mit Hilfe dieser Darstellungsform sind wir nun in der Lage, die Regeln des Gebrauchs von Junktoren in einer exakteren Form anzugeben.

1.1.1.2 Regeln für die Subjunktion

a) Subjunktionsbeseitigung →B

Die Regel der Subjunktionsbeseitung besagt: *Unter der Annahme einer Subjunktion und einer weiteren Aussage, die das Antecedens dieser Subjunktion bildet, darf auf das Succedens dieser Subjunktion geschlossen werden.*

Die Anwendbarkeit dieser Regel ist völlig unabhängig davon, für welche konkreten Aussagen das Antecedens und das Succedens stehen. Die Formbuchstaben in der Darstellung dieser Regel dürfen deshalb keine Abkürzungen für konkrete Aussagen bilden, sondern müssen Platzhalter für beliebige Aussagen sein. Diese Platzhalter sind demnach metasprachliche Mitteilungszeichen für beliebige Aussagen einer gegebenen Objektsprache, weshalb sie

als *Aussagenvariablen* bezeichnet werden. Nachfolgend werden Aussagenvariablen mit Großbuchstaben P, Q, R usw. dargestellt. Die folgende Darstellung der Subjunktionseinführungsregel ist also kein Schluss, sondern eine *Schlussform*, denn die Zeichen „P“ und „Q“ sind Variablen – sie stehen nicht für *bestimmte*, sondern für *beliebige* Aussagen.
Für die Anwendbarkeit der Subjunktionsbeseitigung ist die Reihenfolge der beiden vorausgesetzten Aussagen unerheblich, so dass sich diese Regel in den folgenden zwei Varianten darstellen lässt (wobei die Subjunktion bei der Regelanwendung stets zuerst genannt wird, d. h. in der ersten Variante steht bei „→B“ die Zeile (k) vor der Zeile (l), während bei der zweiten Variante zuerst Zeile (l) genannt wird):

(I)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$P \rightarrow Q$	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	P	
$k_1,\ldots,l_s$	(m)	Q	→B, k, l

(II)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	P	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	$P \rightarrow Q$	
$k_1,\ldots,l_s$	(m)	Q	→B, l, k

Die Buchstaben k, l, und m stehen für beliebige natürliche Zahlen, die die Zeilennummern angeben, so dass $k < l < m$. Entsprechend stehen die Sequenzen vor den Zeilennummerierungen ($k_1,\ldots,k_r$ usw.) für die Zeilennummern, von denen die jeweilige Zeile abhängt, so dass $k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq k$ usw. (bei $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k$ würde es sich um eine Annahme in Zeile (k) handeln).

b) Subjunktionseinführung →E

Wie es eine Regel für die Beseitigung einer Subjunktion gibt, so gibt es auch eine Regel für die *Einführung* einer Subjunktion. Die Funktionsweise der Subjunktionseinführung lässt sich anhand des obigen Schlusses über den Begründer der formalen Logik leicht verständlich machen. Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Argumentation:

1	(1)	$a \rightarrow f$	A
2	(2)	$a \wedge b$	A
2	(3)	a	∧B, 2
1, 2	(4)	f	→B, 1, 3

Wie gesagt, zeigen die Ziffern vor den einzelnen Zeilennummern die bestehenden Abhängigkeitsverhältnisse an. So bedeutet z. B. die Ziffer 2 vor Zeile (3), dass die Aussage „a“ von der Aussage abhängt, die sich in Zeile (2) befindet, also von der Aussage „$a \wedge b$“. Dieses Abhängigkeitsverhältnis lässt sich durch folgende Aussage ausdrücken: „Wenn ‚a und b‘, dann ‚a‘ “, oder: „$(a \wedge b) \rightarrow a$“. Das Explizitmachen dieses Abhängigkeitsverhältnisses besteht also in der Einführung einer Subjunktion, weshalb es als „Subjunktionseinführung“ bezeichnet wird und mit „→E“ symbolisiert wird.

Im Falle einer Subjunktionseinführung wird also eine Voraussetzung einer Aussage mit Hilfe der Subjunktion explizit gemacht. Wie schon im Falle von →B notiert man bei der Anwendung der Subjunktionseinführung außer „→E“ die Zeilennummer, auf die die Regel angewendet wird, außerdem die Ziffer derjenigen Zeile, in der die Annahme steht, die in der nun formulierten Subjunktion das Antecedens bildet. Diese Zeilenangabe wird unterstrichen. Da das Abhängigkeitsverhältnis nun durch die Subjunktion ausgedrückt wird, verschwindet das Antecedens (= die unterstrichene Ziffer) bei den Annahmen. Die obige Argumentation könnte also wie folgt fortgesetzt werden:

1	(1)	$a \to f$	A
2	(2)	$a \wedge b$	A
2	(3)	a	$\wedge$B, 2
1, 2	(4)	f	$\to$B, 1, 3
	(5)	$(a \wedge b) \to a$	$\to$E, $\underline{2}$, 3

In Zeile (5) „wandert“ also die Voraussetzung aus Zeile (2) (d. h. die Konjunktion „$a \wedge b$“) als Antecedens in den Aussageteil hinein:

I)	2	(5)	a	
II)		(5)	$2 \to a$	
III)		(5)	$(a \wedge b) \to a$	$\to$E, $\underline{2}$, 3

Zeile (5) hängt nun von keiner weiteren Aussage mehr ab, was nicht bei jeder Anwendung von →E der Fall ist, wie ein möglicher Fortgang der Argumentation zeigt:

2 (6) $(a \to f) \to f$ $\to$E, $\underline{1}$, 4

Da die Aussage in Zeile (6) auch nach →E eine Voraussetzung hat – die Aussage von Zeile (2) – kann natürlich noch einmal die Regel der Subjunktionseinführung angewendet werden:

(7) $(a \wedge b) \to ((a \to f) \to f)$ $\to$E, $\underline{2}$, 6

Die Regel der Subjunktionseinführung lautet also wie folgt: *Dass eine Aussage von einer anderen Aussage abhängt, lässt sich durch eine Subjunktion ausdrücken, in der diejenige Aussage, von der die andere Aussage abhängt, das Antecedens und die abhängige Aussage das Succedens bilden*:

k	(k)	P	A[6]
$l_1, \ldots, l_s$, k	(l)	Q	
$l_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \to Q$	$\to$E, $\underline{k}$, l

[6] Notabene: Nur Annahmen können durch →E derart erfasst werden, dass sie nach dieser Regelanwendung das Antecedens bilden. Warum wohl?

1.1.1.3 Regeln für die Konjunktion

a) Konjunktionsbeseitigung $\wedge$B

Die bereits informell eingeführte Regel der Konjunktionsbeseitigung besagt: *Von einer Konjunktion darf auf jedes einzelne Konjunktionsglied geschlossen werden.* Mit den uns nun zur Verfügung stehenden Mitteln, kann die Konjunktionsbeseitungsregel in den beiden Varianten ihres Auftretens so dargestellt werden:

(I)				(II)			
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \wedge Q$		$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \wedge Q$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	P	$\wedge$B, k	$k_1, \ldots, k_r$	(l)	Q	$\wedge$B, k

b) Konjunktionseinführung $\wedge$E

Die Regel der Konjunktionseinführung besagt: *Unter der Annahme einer Aussage und einer weiteren Annahme einer weiteren Aussage, darf auf die Konjunktion dieser beiden Aussagen geschlossen werden.* Wie die Regel der Konjunktionsbeseitugung hat auch diese zwei Varianten:

(I)

P
Q
____
P und Q

(II)

Q
P
____
P und Q

Die Reihenfolge der Glieder der eingeführten Konjunktion wird durch die Reihenfolge der genannten Zeilennummern nach $\wedge$E festgelegt:

(I)				(II)			
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	P		$k_1, \ldots, k_r$	(k)	Q	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	Q		$l_1, \ldots, k_s$	(l)	P	
$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \wedge Q$	$\wedge$E, k, l	$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \wedge Q$	$\wedge$E, l, k

1.1.1.4 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierung des Gebrauchs von Subjunktionen und Konjunktionen folgende Schlüsse.

1. „Wenn Venedig am Meer liegt, dann kann man dort auch baden. Venedig liegt am Meer. Demnach kann man in Venedig baden.“

2. „Wenn Frege die *Begriffsschrift* schrieb, dann kann er als der Begründer der modernen Logik gelten. Hier steht, dass Frege die *Begriffsschrift*, und Wittgenstein den *Tractatus* schrieb. Es steht demnach fest, dass Frege die *Begriffsschrift* schrieb. Daraus folgt: Frege kann als der Begründer der modernen Logik gelten.“

3. Ist diese Argumentation korrekt? Wenn nicht, korrigieren Sie sie.

1	(1)	$a \wedge b$	A
2	(2)	c	A
1, 2	(3)	$(a \wedge b) \wedge c$	$\wedge$E, 1, 2
1, 2	(4)	$a \wedge b$	$\wedge$B, 3
1	(5)	$c \rightarrow (a \wedge b)$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4

1.1.1.5 Regeln für die Negation

Unter einer Negation versteht man eine *verneinte Aussage*, wie „Wir hatten kein schönes Wetter“, „Rohe Oliven sind ungenießbar“ oder „Die Mutter ist es nicht.“[7] Aussagen dieser Form werden in der Logik mit „Nicht p“ wiedergegeben und als Negationen bezeichnet. Ihr Gebrauch ist – wie schon im Falle von Subjunktion und Konjunktion – durch eine Beseitigungs- und eine Einführungsregel festgelegt. Obwohl der Negationsausdruck „Nicht“, der durch das Zeichen „¬“ symbolisiert wird, keine zwei Aussagen zu einer komplexeren Aussage verbindet, wird auch er als Junktor bezeichnet, was nicht weiter verwirren sollte, da Atome trotz ihres Namens ja auch nicht unteilbar sind.

a) Negationsbeseitigung ¬¬B

$$\frac{\text{Nicht nicht P}}{\text{P}}$$

Diese Regel, die auch als *duplex negatio affirmat* („doppelte Verneinung bejaht“) bezeichnet wird, besagt: *Von einer zweifach negierten Aussage darf auf die unnegierte Aussage geschlossen werden*:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\neg P$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	P	$\neg\neg$B, k

[7] Dieses Beispiel stammt aus Sigmund Freuds Aufsatz „Die Verneinung“ (GW III, 373–377). Der Satz wurde von einem Patienten geäußert, der eine ihm im Traum erschienene Person identifizieren sollte. Bei dieser spontan gegebenen Antwort kann man nach Freud sicher sein, dass es die Mutter war. Dies ist ein Beispiel dafür, wie die zugrunde liegende tiefenpsychologische Form von der uns interessierenden logischen Form abweichen kann. Auf dem gegenteiligen Sinn von „nicht“ beruht auch der Witz „A: Nun sind wir schon 10 Jahre verheiratet, ist das nicht schön? B: Ja, das ist nicht schön!“

Die Umgangssprache variiert hier sowohl im Ausdruck als auch in der Bedeutung erheblich. So findet man Aussagen der Form „Nicht nicht p“ höchst selten; häufiger sind hingegen mit dem Präfix „un-“ gebildete Aussagen, wie „Das ist nicht uninteressant“ (= „Das ist interessant“), oder die Nachstellung der zweiten Verneinung, wie „Nicht mitmachen gab's nicht“ (= „Es gab nur mitmachen“). Mit Hilfe der letzteren Form werden zum Teil (vorwiegend in Dialekten) auch *Verstärkungen* ausgedrückt, wie in den Aussagen „Der hat keinen Mut nicht“ (= „Er hat überhaupt keinen Mut“) oder „Das kann keiner nicht verstehen“ (= „Es ist gänzlich unverständlich“). Diese Verwendungsweise wird also durch die hier vorgestellte Regel der Negationsbeseitigung ausgeschlossen.

b) Negationseinführung $\neg$E

$$\frac{\text{Wenn P, dann Q und nicht Q}}{\text{Nicht P}}$$

Die Negationseinführungsregel, auch als *reductio ad absurdum* bezeichnet, lautet: *Von einer Subjunktion, deren Succedens eine Konjunktion von einer Aussage und deren Negation bildet, darf auf das negierte Antecedens dieser Subjunktion geschlossen werden*:

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow (Q \wedge \neg Q) & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P & \neg E, k \end{array}$$

Die Regel der Negationseinführung versucht das intuitive Verständnis wiederzugeben, wonach eine Aussage, aus der sich etwas offensichtlich Falsches schließen lässt, nicht richtig sein kann. Was im übrigen für alle Regeln gilt, gilt für die Regel der Negationseinführung vielleicht in besonderem Maße, dass sich nämlich Einsicht in die Nützlichkeit, sowie ein volles Verständnis erst bei der Anwendung ergeben.

1.1.1.6 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierungen die Gültigkeit der folgenden Schlüsse.

1. Atome sind nicht unteilbar. Also sind sie teilbar.

2. Wenn mein Vorlesungsskript stimmt, dann hat er gesagt, dass das Gute existiert und dass es nicht existiert. Also stimmt mein Vorlesungsskript nicht.

3. Hier steht zwar, dass sowohl das Weltbild von Ptolomäus, als auch das Weltbild von Kopernikus richtig ist, aber das kann unmöglich stimmen; denn wenn das Ptolomäische Weltbild richtig ist, dann dreht sich die Sonne um die Erde, was sie im Kopernischen Weltbild nicht tut.
4. Aus $A \wedge B$ folgt $A \rightarrow B$.
5. Aus $A \wedge B$ folgt $\neg(A \rightarrow \neg B)$.

1.1.1.7 Regeln für die Adjunktion

Als *Adjunktionen* werden Aussagen bezeichnet, die zwei Möglichkeiten behaupten, ohne auszuschließen, dass auch beide bestehen können. Der durch „oder“ standardisierte Adjunktionsausdruck wird deshalb auch *einschließendes Oder* genannt, im Gegensatz zum *auschließenden Oder*, das zwei miteinander unverträgliche Alternativen behauptet (siehe weiter unten). Umgangssprachliche Beispiele für Adjunktionen sind etwa „Sie ist wohl sehr fleißig oder hoch begabt“, „Was den Atomismus und die Ideenlehre betrifft, so stammt mindestens eine davon aus Indien“ oder „Geld muss man haben, es sei denn, man hat Beziehungen“. Das Zeichen „∨“ für den Adjunktionsausdruck ist eine Stilisierung des ersten Buchstabens des lateinischen *vel* (= „oder“).

a) Adjunktionsbeseitigung ∨B

(I)	(II)
P oder Q	P oder Q
Nicht P	Nicht Q
Q	P

Die Adjunktionsbeseitigungsregel lautet: *Von einer Adjunktion und einem negierten Adjunktionsglied darf auf das andere Adjunktionsglied geschlossen werden.* Wie bei der Konjunktionsbeseitung gibt es von dieser Regel also zwei Varianten:

(I)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \vee Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg P & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & Q & \vee B, k, l \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{rlll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \vee Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P & \vee B, k, l \end{array}$$

Natürlich können die Aussagen der Zeilen (k) und (l) auch vertauscht vorkommen. Bei der Adjunktionsbeseitigung wird jedoch immer zuerst die Adjunktion genannt:

(Ia)				(IIa)			
$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg P$		$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg Q$	
$l_1,\ldots,l_s$	(l)	$P \vee Q$		$l_1,\ldots,l_s$	(l)	$P \vee Q$	
$k_1,\ldots,l_s$	(m)	Q	$\vee$B, l, k	$k_1,\ldots,l_s$	(m)	P	$\vee$B, l, k

b) Adjunktionseinführung $\vee$E

$$\frac{P}{P \text{ oder } Q}$$

Die Regel der Adjunktionseinführung lautet: *Von einer Aussage darf auf eine Adjunktion geschlossen werden, die diese Aussage als ein Adjunktionsglied hat*:

(I)				(II)			
$k_1,\ldots,k_r$	(k)	P		$k_1,\ldots,k_r$	(k)	P	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$P \vee Q$	$\vee$E, k	$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$Q \vee P$	$\vee$E, k

Die auf den ersten Blick vielleicht etwas befremdende Regel der Adjunktionseinführung verdeutlicht man sich am besten daran, dass eine mit „oder“ gebildete Aussage weniger sagt (und in diesem informationstheoretischen Sinn schwächer ist) als jedes einzelne Adjunktionsglied dieser Aussage. Es ist deshalb möglich, von jedem Adjunktionsglied auf die (weniger informative) Adjunktion zu schließen. Als Schluss wird diese Regel höchst selten verwendet, jedoch kann sie innerhalb komplexerer Argumentationen eine wichtige Rolle spielen.

1.1.1.8 Regeln für die Äquivalenz

Behauptet man, dass eine Aussage genau dann gilt, wenn eine weitere Aussage gilt, dann spricht man in der Logik von einer *Äquivalenz*. Äquivalenzen werden z. T. mit der Wendung „ist äquivalent mit“ ausgedrückt, wie in der Aussage „Die Tatsache, dass Franken keine Bayern sind, ist äquivalent mit der Tatsache, dass Bayern keine Franken sind“. Aber auch „wenn, und nur wenn“ oder „genau dann, wenn“ sind dafür gebräuchlich, wie in „Die Prüfung gilt als bestanden wenn, und nur wenn alle drei Teilprüfungen bestanden sind“ oder „Man hat genau dann gewonnen, wenn man exakt 100 Punkte erreicht“. Der Ausdruck „genau dann, wenn“ – symbolisiert durch „$\leftrightarrow$“ – soll hier als Standardformulierung für Äquivalenzen verwendet werden. Der Doppelpfeil gibt einen symbolischen Hinweis darauf, wie der Gebrauch von Äquivalenzen normiert ist, nämlich als Subjunktion in beide Richtungen, weshalb Äquivalenzen manchmal auch als „Bisubjunktionen“ bezeichnet werden.

a) Äquivalenzbeseitigung $\leftrightarrow$B

(I)	(II)
$\dfrac{\text{P genau dann, wenn Q}}{\text{Wenn P, dann Q}}$	$\dfrac{\text{P genau dann, wenn Q}}{\text{Wenn Q, dann P}}$

Die Regel der Äquivalenzbeseitung besagt: *Von einer Äquivalenz darf auf eine Subjunktion geschlossen werden, die ein Äquivalenzglied zum Succedens und das andere zum Antecedens hat*:

(I)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P \rightarrow Q & \leftrightarrow B, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & Q \rightarrow P & \leftrightarrow B, k \end{array}$$

b) Äquivalenzeinführung $\leftrightarrow$E

$$\dfrac{\begin{array}{l}\text{Wenn P, dann Q}\\ \text{Wenn Q, dann P}\end{array}}{\text{P genau dann, wenn Q}}$$

Die Äquivalenzeinführungsregel besagt: *Von zwei Subjunktionen, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Subjunktionsglieder unterscheiden, darf auf eine Äquivalenz geschlossen werden, die diese Subjunktionsglieder als Äquivalenzglieder besitzt*:

$$\begin{array}{rcll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & Q \rightarrow P & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \leftrightarrow Q & \leftrightarrow E, k, l \end{array}$$

1.1.1.9 Regeln für die Kontravalenz

Im Gegensatz zum einschließenden Oder der Adjunktion wird das ausschließende Oder als *Kontravalenz* bezeichnet. Während der mit „oder“ standardisierte Adjunktionsausdruck („$\vee$“) also dem lateinischen *vel* entspricht, entspricht der mit „entweder–oder“ standardisierte Kontravalenzausdruck („$\not\leftrightarrow$“) dem lateinischen *aut–aut*. Kontravalenzen sind demnach z. B. „Entweder wird sie in der nächsten halben Stunde hier eintreffen, oder sie hat ihren Zug verpasst“, oder „Von den beiden angegebenen Antworten ist genau eine richtig“. Sowohl die Kontravalenz als auch die Adjunktion werden manchmal als „Disjunktion“ bezeichnet.

a) Kontravalenzbeseitigung $\nleftrightarrow$B

(I)	(II)
$\dfrac{\text{Entweder P oder Q}}{\text{Wenn P, dann nicht Q}}$	$\dfrac{\text{Entweder P oder Q}}{\text{Wenn nicht P, dann Q}}$

Die Regel der Kontravalenzbeseitigung lautet: *Von einer Kontravalenz darf auf eine Subjunktion geschlossen werden, die ein negiertes Kontravalenzglied entweder zum Antecedens oder zum Succedens hat*:

(I)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & P \rightarrow \neg Q & \nleftrightarrow B, k \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \rightarrow Q & \nleftrightarrow B, k \end{array}$$

b) Kontravalenzeinführung $\nleftrightarrow$E

$$\dfrac{\begin{array}{l}\text{Wenn P, dann nicht Q}\\ \text{Wenn nicht P, dann Q}\end{array}}{\text{Entweder P oder Q}}$$

Die Regel der Kontravalenzeinführung besagt: *Von einer Subjunktion mit negiertem Succedens und einer weiteren Subjunktion, die die Negation des Antecedens der ersten Subjunktion zum Antecedens und das unnegierte Succedens der ersten Subjunktion zum Succedens hat, darf auf eine Kontravalenz geschlossen werden, deren Kontravalenzglieder das unnegierte Antecedens und das unnegierte Succedens der beiden Subjunktionen bilden*:

$$\begin{array}{rclll} k_1,\ldots,k_r & (k) & P \rightarrow \neg Q & \\ l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg P \rightarrow Q & \\ k_1,\ldots,l_s & (m) & P \nleftrightarrow Q & \nleftrightarrow E, k, l \end{array}$$

1.1.1.10 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe der oben eingeführten Darstellungsform und aufgrund der vorgenommenen Normierungen die Gültigkeit der folgenden Schlüsse.

1. „Wenn die Verordnung in Kraft tritt, dann haben ihr mindestens zwei Drittel zugestimmt. Wenn der Verordnung mindestens zwei Drittel zugestimmt haben, dann tritt sie in Kraft. Demnach gilt: Die Verordnung tritt genau dann in Kraft, wenn ihr mindestens zwei Drittel zugestimmt haben.“

2. „Wenn die Verordnung in Kraft tritt, dann wurde sie von mindestens einem Drittel nicht abgelehnt. Wenn die Verordnung nicht in Kraft tritt, dann wurde sie von mindestens einem Drittel abgelehnt. Daraus folgt: Entweder tritt die Verordnung in Kraft, oder mindestens ein Drittel hat sie abgelehnt."

3. „Entweder es regnet, oder es regnet nicht. Nun regnet es. Also regnet es nicht, denn (bei ‚r' für ‚Es regnet'):

$$\begin{array}{rlll} 1 & (1) & \mathrm{r} \nleftrightarrow \neg \mathrm{r} & \mathrm{A} \\ 2 & (2) & \mathrm{r} & \mathrm{A} \\ 1 & (3) & \mathrm{r} \rightarrow \neg \mathrm{r} & \nleftrightarrow\mathrm{B}, 1 \\ 1,2 & (4) & \neg \mathrm{r} & \rightarrow\mathrm{B}, 3, 2 \end{array}$$

4. „Tina bringt Ulla oder Claudia mit. Ulla ist Krank. Also bringt Tina Claudia mit." (Bevor Sie loslegen: Wäre es mit der ersten Aussage vereinbar, dass Tina Ulla *und* Claudia mitbringt?)

1.1.1.11 Die Bindungsstärke der Junktoren

Bisher haben wir bei der formalen Wiedergabe umgangssprachlicher Aussagen runde Klammern zur Strukturierung verwendet (wie sie ja in der Schriftsprache des Deutschen auch verwendet werden, wo außerdem noch andere Zeichen diese Funktion erfüllen, wie Punkte, Kommata usw.). Diese Gebrauchsweise wird auch weiterhin beibehalten, wobei fortan auch eckige Klammern zu diesem Zweck verwendet werden dürfen. Runde und eckige Klammern sollen in der formalen Schreibweise als *Gruppierungszeichen* dienen. Auf die Gruppierungszeichen kann überall dort verzichtet werden, wo der Ausdruck schon eindeutig strukturiert ist. Eine solche Eindeutigkeit kann allein schon deshalb vorliegen, weil die einzelnen Junktoren unterschiedliche *Bindungsstärken* besitzen. Die Reihenfolge der Bindungsstärke ist $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\nleftrightarrow$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, wobei $\neg$ am stärksten und $\leftrightarrow$ am schwächsten bindet. Da die Klammereinsparungsregel eine Kann-Bestimmung ist, dürfen Klammern auch in Ausdrücken verwendet werden, wo sie sich aufgrund der Bindungsstärke als redundant erweisen.

Das Konzept, verschiedenen Verknüpfungszeichen unterschiedliche Bindungsstärken zuzuweisen, ist den meisten Lesern vermutlich aus der Mathematik bekannt, wo die Formel „Punktrechnung vor Strichrechnung" besagt, dass beispielsweise der Term $x \cdot y + z$ als $(x \cdot y) + z$, und nicht als $x \cdot (y + z)$ zu lesen ist.

1.1.1.12 Aufgaben

Geben Sie die folgenden Ausdrücke mit Klammern wieder, wenn sie klammerfrei sind und so weit wie möglich ohne Klammern wieder, wenn sie mit

Klammern gebildet sind. Der jeweilige Sinn der Ausdrücke darf sich dabei nicht ändern.

1. $a \rightarrow b \vee c$
2. $a \wedge b \vee c \nleftrightarrow d$
3. $d \nleftrightarrow e \leftrightarrow \neg f$
4. $(a \wedge b) \rightarrow d$
5. $(a \leftrightarrow b) \nleftrightarrow [d \vee (\neg a \wedge b)]$

1.1.2 Ein Kalkül des natürlichen Schließens

Auf den vorangehenden Seiten wurde die Gültigkeit von Schlüssen auf deren formale Gültigkeit zurückgeführt. Es zeigte sich, dass die formale Gültigkeit auf der Verwendungsweise bestimmter Partikel, die wir als „Junktoren" bezeichneten, beruht, da diese die Form von Aussagen festlegen und die Aussageform wiederum bestimmt, welche Aussagen mit welcher Form daraus erschlossen werden können. Den alltäglichen intuitiven Gebrauch dieser Formwörter haben wir expliziert, indem wir für jedes dieser Wörter eine sog. Einführungsregel und eine sog. Beseitigungsregel formulierten, wobei die Einführungsregeln angeben, wann *auf* eine komplexere Aussage geschlossen werden darf und die Beseitigungsregeln angeben, wann *aus* einer komplexeren Aussage geschlossen werden darf. Die Gesamtheit dieser Regeln bildet den *(aussagenlogischen) Kalkül des Natürlichen Schließens*, kurz *KNS*. Ganz allgemein ist ein Kalkül ein Herstellungsverfahren von Zeichenreihen. Tatsächlich sind wir mit Hilfe unserer Regeln in der Lage, bestimmte Zeichenreihen in beliebiger Anzahl zu erzeugen. Unsere Zeichen sind jedoch bereits gedeutete Zeichen, sie stehen für Formen von natürlichsprachlichen Aussagen. Insofern beansprucht der hier eingeführte Kalkül ein Kalkül des *natürlichen Schließens* zu sein, d. h. der Form natürlichsprachlicher Argumentation zu entsprechen.[8] Der KNS spricht also *über* die Umgangssprache, indem er Regeln *für* diese angibt; er ist damit eine Methode, die Frage nach der formalen Gültigkeit von Schlüssen zu entscheiden.

[8]Der KNS stammt ursprünglich von Gerhard Gentzen und wurde von Hans Hermes und Willard van Orman Quine weiterentwickelt. Unabhängig von Gentzen entwarf auch Stanisłav Jaśkowsky einen KNS (vgl. Gerhard Gentzen, „Untersuchungen über das logische Schließen", *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934), 176–210; wieder abgedr. in Karel Berka/Lothar Kreiser (Hg.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, Akademie-Verlag: Berlin 1971, 192–253; Stanisłav Jaśkowsky, „On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica* (Old Series) 1 (1934), 5–32; wieder abgedr. in: Storrs McCall (Hg.), *Polish Logic 1920–1939*, Clarendon: Oxford 1967, 232–258; Francis Jeffrey Pelletier, „A Brief History of Natural Deduction", *History and Philosophy of Logic*, 20 (1999), 1–31).

Es ist durchaus denkbar (und immer wieder vorgekommen), dass jemand den Vorwurf erhebt, die hier vorgestellten Gebrauchsregeln der Junktoren unterstellten unhinterfragt eine „normative Kraft des Faktischen,“ indem sie die Rolle der Junktoren in tatsächlichen Argumentationen zu Vorschriften korrekten Schlussfolgerns erklärten. Und wenn nun jemand nicht bereit wäre, diese Regeln anzuerkennen, hieße das nicht, dass eine argumentative Auseinandersetzung mit dieser Person unmöglich wäre? Das heißt es nicht. Vorausgesetzt, diese Person ist bereit zu argumentieren, d. h. irgendwelchen (widerspruchsfreien) Regeln zu folgen, und vorausgesetzt, diese Person ist bereit, diese Regeln zu nennen, so ist eine Argumentation mit ihr möglich. Für argumentative Auseinandersetzung ist es also hinreichend, ein (widerspruchsfreies) Regelwerk anzuerkennen und dieses Regelwerk explizit angeben zu können.[9]

Ein weiterer Einwand gegen das Konzept, mit einem Kalkül der hier vorgestellten Art umgangssprachlich formulierte Argumentationen zu bewerten, zielt auf die Legitimität der dabei vorzunehmenden „Übersetzung“ in standardisierte Formen. Dazu ist zu sagen, dass solche Übersetzungen in den Fällen, in denen sich der Autor des Argumentes dazu äußern kann, unproblematisch sind. Anders liegt die Sache natürlich, wenn ein Rückfragen unmöglich ist, etwa weil das Argument einem Text entstammt, dessen Autor längst verstorben ist. In diesen Fällen bleibt in der Tat eine gewisse Unsicherheit hinsichtlich der Adäquatheit der vorgenommenen Übersetzung. Nicht umsonst gibt es eine eigenständige Disziplin – die Hermeneutik – die sich mit dem Problem des Verständnisses von Texten befasst. Die verbleibende Unsicherheit kann einen jedoch nicht von dem Versuch entbinden, die Intentionen des Autors zu rekonstruieren und insofern es um die argumentative Seite des Verständnisses geht, ist die Logik dafür ein geeignetes Mittel. Im übrigen können sich Übersetzungen dazu eignen, die Bedeutung einer oder mehrerer Aussagen erst klar heraus zu stellen. Dass eine solche Überlegung nicht auf die formale Logik beschränkt ist, zeigt die Auseinandersetzung des Philosophen Martin Heidegger mit dem Germanisten Emil Staiger um die richtige Lesart einer Zeile aus einem Gedicht von Mörike.[10]

1.1.2.1 Ableitungen, Beweise, Theoreme

Mit Hilfe des KNS dargestellte Schlüsse sollen von nun an *Ableitungen* genannt werden und die Aussage „Aus den Prämissen P_1 bis P_n ist die Konklusion K ableitbar“ soll geschrieben werden als „$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{n} \vdash \mathrm{K}$“, wobei eine Zeichenfolge dieser Form von nun als *Sequenz* bezeichnet werden soll. Eine Ableitung ist also eine *Folge von Aussagen im KNS mit mindestens einer*

[9] Dieses *Toleranzprinzip* wurde formuliert von Rudolf Carnap in *Die logische Syntax der Sprache*, Springer: Wien 1934, S. 45.

[10] Vgl. Martin Heidegger, *GA* 13, Klostermann: Frankfurt/Main 1983, 93–109.

Regelanwendung.

Da die Regel der Subjunktionseinführung eine Voraussetzung eliminiert (nämlich diejenige, die dann das Vorderglied der neuen Subjunktion bildet), sind in einer Ableitung Zeilen denkbar, die keinerlei Voraussetzungen mehr besitzen, wie nachfolgend die Zeile (3):

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$\wedge$B, 1
	(3)	$(P \wedge Q) \rightarrow P$[11]	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 2

Eine Ableitung, die mit einer voraussetzungslosen Zeile endet, heiße *Beweis*, und die Aussage, die in dieser letzten, voraussetzungslosen Zeile steht, heiße *Theorem*. Ein Beweis ist also eine Ableitung, deren letzte Zeile von nichts abhängt, und ein Theorem ist eine Aussage in der letzten Zeile eines Beweises. Es gelten demnach folgende Verhältnisse:

Ableitung	Beweis
„K ist (aus P) ableitbar" („$P \vdash K$")	„K ist beweisbar" („$\vdash K$")
(1) P (Prämisse)	(1) P (Prämisse)
$\vdots$	$\vdots$
… (n) K (Konklusion)	$\emptyset$ (n) K (Konklusion = Theorem)

Ein Beispiel für ein Theorem im KNS ist der sog. „Satz von der Identität"[12], der nachfolgend mit „SVI" wiedergegeben werden soll und die Form „$P \rightarrow P$" besitzt. Der Beweis für den Satz von der Identität (also der Beweis für die Sequenz $\vdash P \rightarrow P$) ist relativ überschaubar:

1	(1)	P	A
	(2)	$P \rightarrow P$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 1

Von einem Theorem soll gelten, dass es an jeder Stelle einer Ableitung eingeführt werden darf. Die Regel der Theoremeinführung lautet also:

(k) TH KTH

„TH" steht hier für das Theorem und „KTH" für das Kürzel des Theorems. Ein weiteres Theorem des KNS ist der sog. „Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch", (auch „principium contradictionis exclusi") kurz „SVW", mit der Form „$\neg(P \wedge \neg P)$". Auch dieses Theorem lässt sich ohne größeren Aufwand beweisen:

[11] In diesem Ausdruck hätte aufgrund der höheren Bindungsstärke der Konjunktion gegenüber der Subjunktion auf die Klammern verzichtet werden können.

[12] Die Bezeichnung „Satz" wird hier aus rein historischen Gründen verwendet; unter einem Theorem im KNS sei stets eine Aussageform verstanden.

1	(1)	$P \wedge \neg P$	A
	(2)	$(P \wedge \neg P) \to (P \wedge \neg P)$	$\to$E, $\underline{1}$, 1
	(3)	$\neg(P \wedge \neg P)$	$\neg$E, 2

Als drittes und letztes Theorem sei hier der sog. „Satz vom (ausgeschlossenen) Dritten“ (auch „tertium non datur“) genannt, das wir künftig mit „SVD“ abkürzen wollen und die Form „$P \vee \neg P$“ besitzt.

1.1.2.2 Aufgaben

Geben Sie für die folgenden Sequenzen Ableitungen im KNS:

1. $P \to P \vdash P \leftrightarrow P$
2. $\vdash P \leftrightarrow P$
3. $\vdash P \vee \neg P$, beginnen Sie hier mit den folgenden Zeilen:

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A

4. $P \wedge Q \vdash P \vee Q$
5. $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg P \vee \neg Q$

1.1.2.3 Indirektes Schlussfolgern

Die Verwendungsweise der Negation, wie wir sie in den Regeln der Negationseinführung und der Negationsbeseitigung expliziert haben, ermöglicht es, grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen zu einer Konklusion zu gelangen. Dies kann einerseits *direkt* geschehen, so dass die Konklusion im Verlauf der Argumentation sozusagen Stück für Stück „zusammengebaut“ wird. Auf diese Weise konnten die meisten der bislang betrachteten Schlüsse konstruiert werden. Es wurde aber auch schon von einer anderen Argumentationsstrategie Gebrauch gemacht, z. B. beim Beweis des Satzes vom Widerspruch (oder beim Beweis des SVD). Dort wurde zunächst die Negation des Satzes angenommen und gezeigt, dass diese Annahme einen Widerspruch impliziert, weshalb die Annahme mittels Negationseinführung negiert werden konnte. Es ist diese Strategie, weswegen die Negationseinführungsregel von alters her als „reductio ad absurdum“ bezeichnet wird. Ein solches *indirektes* Vorgehen gründet auf folgender Strategie: Soll auf eine Aussage P geschlossen werden, so nimmt man zunächst $\neg P$ an mit dem Ziel, eine Aussage der Form $\neg P \to (Q \wedge \neg Q)$ zu erhalten, so dass sich die Regel der Negationseinführung anwenden lässt. Der Versuch einer indirekten Schlussfolgerung zielt also auf folgenden Argumentationsverlauf:

	(m)	$\neg P$	
	$\vdots$		
…, m, …	(n-3)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge$E, …
	(n-2)	$\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	$\rightarrow$E, $\underline{\text{m}}$, n-3
	(n-1)	$\neg\neg P$	$\neg$E, n-2
	(n)	P	$\neg\neg$B, n-1

Steht die abzuleitende Aussage P in der letzten Zeile (n) der Ableitung, so haben die letzten vier Zeilen meist die angegebene Gestalt. Hängt die Zeile (n-3) von der Aussage der Zeile (m) allein ab, so handelt es sich um einen Beweis. Ein indirektes Vorgehen ist selbstverständlich auch dann möglich, wenn auf eine Aussage der Form $\neg$P geschlossen werden soll. In diesem Fall ist eine Aussage der Form P (oder $\neg\neg$P) als Annahme zu setzen und auf einen Widerspruch zu führen. Der letzte Schritt der Negationsbeseitigung kann dann im Falle von P als Annahme entfallen.

1.1.2.4 Aufgaben

Beurteilen Sie mit Hilfe des KNS die folgenden Schlüsse:

1. Sie kommen um 18 Uhr oder sie haben den Zug nicht mehr erreicht. Sie haben den Zug aber erreicht. Also kommen sie um 18 Uhr.

2. Wenn sowohl das Flusswasser als auch das Grundwasser verseucht sind, dann ist der Landstrich unbewohnbar. Der Landstrich ist aber seit Jahrzehnten bewohnt. Demnach ist zumindest nicht beides verseucht.

3. Kant war ein deutscher Philosoph und Hegel war ein deutscher Philosoph. Wenn Hegel ein deutscher Philosoph war, dann schrieb er auf deutsch. Wenn Hegel auf deutsch schrieb, dann ist er verständlich. Also ist Hegel verständlich.

4. Boden, der für das Anpflanzen von Karotten geeignet ist, muss tief, sandig und frei von Steinen sein. Für das Anpflanzen von Leinsamen ist sandiger Boden und schwerer Boden völlig ungeeignet. Also ist Boden nicht sowohl für Karotten als auch für Leinsamen geeignet.

5. „Wenn es Ictus in dem Sprechen giebt – verschieden vom Accent – dann muß der im Verse sich wiederfinden. Aber die Worte haben die verschiedenste Stellung im Verse, bald in der Arsis, bald [in der] Thesis, somit haben sie keinen Ictus. Giebt es einen Versictus (a), dann gewiß keinen Wortiktus (b). Wenn es aber keinen Wortiktus (b) giebt, dann gewiß keinen Versictus (a).

   Wenn a ist, dann ist b nicht.

   Wenn b nicht ist, ist a nicht.

> Also giebt es *nicht* a.
>
> Giebt es *keinen* Versictus, dann ist Wortiktus möglich. Wenn es Wortiktus giebt, dann ist Versictus möglich.“[13]

1.1.2.5 Grundregeln und zulässige Regeln des KNS

Die bisher eingeführten Regeln sollen *die Grundregeln* des KNS genannt werden. Sie legen den Gebrauch der gängigsten Junktoren fest. Die Menge der Grundregeln ist hinreichend, um jeden Schluss auf seine (aussagenlogische) Gültigkeit zu prüfen. Für die Ableitungspraxis empfiehlt es sich allerdings, weitere Regeln zu besitzen, die als „Abkürzungen“ innerhalb von Ableitungen fungieren. Solche *zulässige Regeln* erlauben den Übergang von einem Ausdruck im KNS zu einem anderen Ausdruck im KNS, der gerechtfertigt werden kann allein unter Verwendung der Grundregeln. Exakt beschreiben lassen sich zulässige Regeln als *theoretisch überflüssig und praktisch unentbehrlich*. Die erste dieser Regeln, die wir betrachten wollen, ist das so genannte „Stabilitätsprinzip“, kurz „SP“, das durch die Gültigkeit der Sequenz $\mathrm{P} \vdash \neg\neg\mathrm{P}$ gerechtfertigt ist:

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg\mathrm{P}$	A
1, 2	(3)	$\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}$	$\wedge$E, 1, 2
1	(4)	$\neg\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P})$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 3
1	(5)	$\neg\neg\mathrm{P}$	$\neg$E, 4

Die zulässige Regel des Stabilitätsprinzips lautet demnach: *Jede Aussage darf doppelt negiert werden*:

$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(k)	P	
$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(l)	$\neg\neg\mathrm{P}$	SP, k

Eine weitere zulässige Regel bildet die „Hypothetische Abschwächung“, kurz „HA“, die besagt, dass vor jede Aussage ein beliebiges Antecedens gestellt werden kann:

$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(k)	P	
$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{s}$	(l)	$\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$	HA, k

Diese Regel mag auf den ersten Blick kontraintuitiv erscheinen, die recht übersichtliche Ableitung von $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$ aus P zeigt jedoch deren Richtigkeit:

[13] Friedrich Nietzsche, *Kritische Gesamtausgabe*, 3. Abt., Bd. 3: *Nachgelassene Fragmente, Herbst 1869 bis Herbst 1872*, Berlin 1978, S. 92f.

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1, 2	(3)	$P \wedge Q$	$\wedge$E, 1, 2
1, 2	(4)	P	$\wedge$B, 3
1	(5)	$Q \rightarrow P$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4

Im Gegensatz zur HA ist der „Kettenschluss“ (KS), d. h. $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$, nahezu jedermann einsichtig:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \rightarrow Q$	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	$Q \rightarrow R$	
$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$P \rightarrow R$	KS, k, l

Eine weitere Regel im KNS ist der „Modus tollens“ (MT), der besagt, dass $P \rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \rightarrow Q$	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	$\neg Q$	
$k_1, \ldots, l_s$	(m)	$\neg P$	MT, k, l

Der „Disjunktive Syllogismus“ (DS) besagt $P \nleftrightarrow Q,\ P \vdash \neg Q$ bzw. $P \nleftrightarrow Q,\ Q \vdash \neg P$:

(I)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \nleftrightarrow Q$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	P	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	$\neg Q$	DS, k, l

(II)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \nleftrightarrow Q$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	Q	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	$\neg P$	DS, k, l

Die (aussagenlogische) Kontraposition (KP) besagt $P \rightarrow Q \dashv\vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ (das Zeichen $\dashv\vdash$ bedeutet, dass die Sequenz *in beide Richtungen* laufen soll, so dass die Regel zwei Anwendungsfälle kennt, nämlich $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ sowie $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow Q$):

(I)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \rightarrow Q$	
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg Q \rightarrow \neg P$	KP, k

(II)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg Q \rightarrow \neg P$	
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \rightarrow Q$	KP, k

Das konstruktive Dilemma (KD) besagt $P \vee Q,\ P \rightarrow R,\ Q \rightarrow R \vdash R$:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \vee Q$	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	$P \rightarrow R$	
$m_1, \ldots, m_s$	(m)	$Q \rightarrow R$	
$k_1, \ldots, m_s$	(n)	R	KD, k, l, m

Die letzten hier eingeführten zulässigen Regeln sind die beiden „De Morganschen Regeln“[14] (DM), die durch die Sequenzen $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$ und $\neg P \wedge \neg Q \dashv\vdash \neg(P \vee Q)$ ausgedrückt werden können und folgende Übergänge in einer Ableitung erlauben:

(Ia)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg(P \wedge Q) & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \vee \neg Q & \mathrm{DM}, k \end{array}$$

(Ib)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg P \vee \neg Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg(P \wedge Q) & \mathrm{DM}, k \end{array}$$

(IIa)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg P \wedge \neg Q & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg(P \vee Q) & \mathrm{DM}, k \end{array}$$

(IIb)

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg(P \vee Q) & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \wedge \neg Q) & \mathrm{DM}, k \end{array}$$

Jede Regel, gleichgültig ob Grundregel oder zulässige Regel, kann, sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, beliebig oft angewendet werden; auch kann jedes Theorem beliebig oft eingeführt werden. Das mag in den meisten Fällen sinnlos erscheinen (ist es tatsächlich auch), aber es ist erlaubt, da ja dadurch nichts Falsches entsteht. So ist das nachfolgende „bunte Treiben“ vom formalen Standpunkt durchaus korrekt, wenn auch nicht gerade zielführend:

1	(1)	a	A
2	(2)	b	A
1,2	(3)	$a \wedge b$	$\wedge$E, 1, 2
1,2	(4)	$b \wedge (a \wedge b)$	$\wedge$E, 2, 3
1,2	(5)	$[b \wedge (a \wedge b)] \wedge a$	$\wedge$E, 4, 1
2	(6)	$a \rightarrow [b \wedge (a \wedge b)] \wedge a$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 5
	(7)	$b \rightarrow [a \rightarrow [b \wedge (a \wedge b)] \wedge a]$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 6
1,2	(8)	$b \vee c$	$\vee$E, 2
1,2	(9)	$b \vee c$	$\vee$E, 2
	(10)	$(b \rightarrow a) \vee \neg(b \rightarrow a)$	SVD
	(11)	$(b \rightarrow a) \vee \neg(b \rightarrow a)$	SVD
1,2	(12)	$(b \wedge g) \rightarrow (b \vee c)$	HA, 8
1,2	(13)	$(a \wedge f) \rightarrow (b \vee c)$	HA, 8
14	(14)	$(b \rightarrow a) \vee \neg(b \rightarrow a)$	A
15	(15)	b	A
16	(16)	$a \wedge b$	A
1,2	(17)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	DM, 4
1,2	(18)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	DM, 4
19	(19)	$\neg b \vee \neg(a \wedge b)$	A
16	(20)	a	$\wedge$B, 16

[14] Benannt nach dem englischen Logiker Augustus De Morgan (1806–1871).

1.1.2.6 Aufgaben

1. Beweisen Sie KS, MT, DS, KP, KD und DM.

2. Beurteilen Sie mit Hilfe des KNS den folgenden Schluss: Der Beweis ist sophistisch oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft und die Logik versagt nicht. Also ist der Beweis sophistisch.

3. „Gibt es aber keine Auferstehung der Toten, so ist auch Christus nicht auferweckt worden. Ist Christus nicht auferweckt worden, so ist unsere Predigt leer, und auch der Glaube ist leer.“ *(1 Korinther 15, V13–14)*

   (a) In welcher Beziehung stehen für Paulus Auferstehung und Glaube?

   (b) Ist für Paulus die Auferstehung der Toten Voraussetzung für die Auferstehung Christi?

   (c) In *(V20)* heißt es weiter: „Christus ist auferweckt worden.“ Was folgt daraus bezüglich der Leere des Glaubens und bezüglich der Auferstehung der Toten?

1.2 Logik als Theorie formal wahrer Aussagen

1.2.1 Wahrheitswerttabellen

In Kapitel 1.1 wurde Logik als eine Theorie über die *Gültigkeit von Argumenten* eingeführt, in der bestimmte *Regelanwendungen* im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. Man kann Logik aber auch als eine Theorie über die *Wahrheit von Aussagen* betrachten. Auch bei diesem Ansatz stehen die Junktoren im Mittelpunkt, denn sie sind es, die über die Wahrheit einer zusammengesetzten Aussage entscheiden. Sie tun dies aufgrund der Wahrheit bzw. Falschheit der Teilaussagen. So ist beispielsweise eine Konjunktion genau dann wahr, wenn ihre beiden Teilaussagen wahr sind. Geht man davon aus, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (oder anders ausgedrückt: dass jede Aussage genau einen der beiden *Wahrheitswerte* „wahr“ oder „falsch“ besitzt), dann muss man bei einer Konjunktion (überhaupt bei jeder aus zwei Teilaussagen bestehenden Aussage) insgesamt vier Fälle bezüglich der Wahrheitswertverteilung unterscheiden: (1) beide Teilaussagen können wahr sein, (2) die erste Teilaussage kann wahr, die zweite falsch sein, (3) die erste kann falsch, die zweite wahr sein, (4) beide Teilaussagen können falsch sein.

Diese Verteilung und die entsprechende Zuordnung des Wahrheitswertes lässt sich übersichtlicher in tabellarischer Form darstellen. Dabei soll im Folgenden „wahr" mit „1" und „falsch" mit „0" abgekürzt werden, so dass sich für eine Konjunktion folgende Tabelle ergibt:

P	Q	P ∧ Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Diese so genannte *Wahrheitswerttabelle* bringt auf übersichtliche Weise die Bedeutung einer Konjunktion zum Ausdruck, nämlich dass von insgesamt vier möglichen Fällen nur die als wahr behauptet wird, bei der beide Teilaussagen wahr sind. So ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet und kreist um die Sonne" nur dann wahr, wenn sowohl wahr ist, dass die Erde ein Planet ist, als auch, dass die Erde um die Sonne kreist. Im Gegensatz dazu ist die Aussage „Die Erde ist ein Planet oder kreist um die Sonne" bereits dann wahr, wenn die Erde ein Planet ist oder wenn sie um die Sonne kreist, da eine Adjunktion die folgende *Wahrheitswertverteilung* besitzt:

P	Q	P ∨ Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Entsprechend lassen sich auch die anderen bislang verwendeten Junktoren – Kontravalenz, Äquivalenz und Subjunktion beschreiben. Bei der unmittelbaren Nebeneinanderstellung werden auch die spezifischen Unterschiede zwischen diesen Junktoren deutlich. So zeigt sich in der nachfolgenden Tabelle, inwiefern die Kontravalenz als das Gegenteil der Äquivalenz anzusehen ist (was auch dem dafür verwendeten Zeichen des durchgestrichenen Doppelpfeils zum Ausdruck kommt) und was wiederum die Äquivalenz – also das „genau dann, wenn" – von der Subjunktion – also dem „wenn-dann" unterscheidet:

P	Q	$P \nleftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

Die Negation ist ein einstelliger Junktor, da sie sich nur auf eine Aussage bezieht. Deshalb benötigt die sie definierende Tabelle weniger Zeilen:

P	¬P
1	0
0	1

Diese in tabellarischer Form gegebenen Festlegungen bilden zugleich Vorschriften für die Bestimmung von *Wahrheitswertverläufen* komplexerer Aussagen, wie das folgende Beispiel zeigt:[15]

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Die Tatsache, dass bei diesem Beispiel in der letzten Spalte nur Einsen stehen bedeutet, dass eine Aussage der Form $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$ immer wahr ist, gleichgültig welche Wahrheitswerte die einzelnen Teilaussagen besitzen. Solche Aussagen nennt man *formal wahre Aussagen* (deshalb, weil sie allein schon aufgrund ihrer Form wahr sind) bzw. *Tautologien*. Dementsprechend spricht man von *formal falschen Aussagen* bzw. von *Kontradiktionen*, wenn die Aussage zu einer Spalte gehört, die ausschließlich aus Nullen besteht. Wie die folgende Tabelle zeigt, liegt ein solcher Fall z. B. bei $\neg(P \rightarrow P)$ vor:

P	P	$P \rightarrow P$	$\neg(P \rightarrow P)$
1	1	1	0
0	0	1	0

In diesem Falle kann man auf die zweite Spalte verzichten, und kürzer schreiben:

P	$P \rightarrow P$	$\neg(P \rightarrow P)$
1	1	0
0	1	0

Enthält eine Spalte sowohl Einsen als auch Nullen, so bezeichnet man die zugehörige Aussage als *kontingent*. Ein Beispiel dafür wäre etwa eine Aussage der Form $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg R$:

---

[15] Das Beispiel verdeutlicht auch, wie sich die Größe einer Wahrheitswerttabelle bemisst. Die Höhe wird allein durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen bestimmt (bei n *verschiedenen* Variablen ergeben sich 2^n Zeilen), die Breite durch die Anzahl der *verschiedenen* Variablen plus die Anzahl der Junktoren in der längsten Aussage (bei n *verschiedenen* Variablen und m Junktoren ergeben sich $m + n$ Spalten).

P	Q	R	P ∧ Q	¬R	(P ∧ Q) ↔ ¬R
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0

Mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen lassen sich auch Schlüsse auf ihre Gültigkeit prüfen, denn wenn ein Schluss der Form „$P_1, \ldots, P_n \vdash K$" formal gültig ist, dann ist die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow K$" formal wahr; dementsprechend ist bei der wechselseitigen Ableitbarkeit „$P_1, \ldots, P_n \dashv\vdash K$" die Aussage der Form „$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \leftrightarrow K$" formal wahr. So kann man aufgrund der bereits gezeigten Ableitung von $P \nleftrightarrow Q$, $P \vdash \neg Q$ (Disjunktiver Syllogismus) davon ausgehen, dass die entsprechende Aussage der Form $[(P \nleftrightarrow Q) \wedge P] \rightarrow \neg Q$ tautologisch ist, was in der Tat der Fall ist:

P	Q	P ↮ Q	(P ↮ Q) ∧ P	¬Q	[(P ↮ Q) ∧ P] → ¬Q
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

1.2.2 Aufgaben

1. Erstellen Sie Wahrheitswerttabellen für KS, MT, DS, KP, KD und DM.

2. Beurteilen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen die folgenden Aussageformen:

   (a) $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

   (b) $(P \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow P)$

   (c) $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

   (d) $A \wedge B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

3. Prüfen Sie mit Wahrheitswerttabellen die folgenden Ausdrücke und interpretieren Sie diese inhaltlich, insbesondere bezüglich des Zusammenhangs zwischen formal gültigen Schlüssen und formal wahren Aussagen:

   (a) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

   (b) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)]$

4. Was ist von folgendem Schluss zu halten: „Eine Form von Erlösung gibt es dann und nur dann, wenn es eine Form von Sünde gibt. Daraus folgt: Eine Form von Erlösung gibt es dann und nur dann, wenn es einen christlichen Gott gibt und einen christlichen Gott gibt es dann und nur dann, wenn es eine Form von Sünde gibt.“

5. In Platons *Phaidon* findet sich folgendes Argument (es geht um das Wissen vom Gleichen selbst, Schönen selbst etc.): „Wenn wir das <Wissen>, was wir so <sc. vor der Geburt> erworben haben, nicht jedes Mal wieder vergäßen, müssten wir immer mit diesem Wissen geboren werden und unser Leben lang wissen. [...] (75d6-7) Wenn wir es aber, meine ich, vor der Geburt erworben und bei der Geburt verloren haben und später, wenn wir unsere Sinne für diese Dinge hier gebrauchen, jene Wissensinhalte, die wir früher einmal besaßen, wiedererwerben, wäre dann nicht das, was wir ‚lernen‘ nennen, das Wiedergewinnen eines ureigenen Wissens? Wenn wir das ‚wiedererinnern‘ nennen, geben wir ihm doch wohl den richtigen Namen? (75e2-8) [...] Also behaupte ich, muß eines von beidem der Fall sein: entweder sind wir alle mit diesem Wissen geboren und unser Leben lang in dessen Besitz, oder aber diejenigen, von denen wir sagen, dass sie lernen, tun nichts anderes, als sich später wiederzuerinnern, und das Lernen wäre eine Wiedererinnerung.“ (76a4-7)

   Im Kommentar von Gallop wird dazu gesagt: „The argument down to 76c5 is therefore of the following form:

   (1) If P, Q (d7-el)

   (2) If R, S (e2-8)

   So (3) Either Q or S (a4-7)

   In this argument step (3) follows, if but only if, it is assumed that:

   (2∗) Either P or R.“[16] Ist Gallops Analyse korrekt?

6. In der zweiten Studierzimmerszene von Goethes *Faust* gibt es folgende Passage. Was ist von dem vorgetragenen Schluss des Mephistopheles (dem „Geist der stets verneint“) zu halten?

   > *Mephistopheles:*
   > Gebraucht der Zeit, sie geht so schnell von hinnen,
   > Doch Ordnung lehrt Euch Zeit gewinnen.
   > Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
   > Zuerst Collegium Logicum.
   > Da wird der Geist Euch wohl dressiert,

[16] David Gallop, *Plato: Phaedo*, Clarendon Press: Oxford 1975, S. 131 f.

In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.
Dann lehret man Euch manchen Tag,
Daß, was Ihr sonst auf einen Schlag
Getrieben, wie Essen und Trinken frei,
Eins! Zwei! Drei! dazu nötig sei.
Zwar ist's mit der Gedankenfabrik
Wie mit einem Weber-Meisterstück,
Wo ein Tritt tausend Fäden regt,
Die Schifflein herüber hinüber schießen,
Die Fäden ungesehen fließen,
Ein Schlag tausend Verbindungen schlägt.
Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt so sein:
Das Erst wär so, das Zweite so,
Und drum das Dritt und Vierte so;
Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
Das Dritt und Viert wär nimmermehr.
Das preisen die Schüler allerorten,
Sind aber keine Weber geworden.
Wer will was Lebendigs erkennen und beschreiben,
Sucht erst den Geist heraus zu treiben,
Dann hat er die Teile in seiner Hand,
Fehlt, leider! nur das geistige Band.
Encheiresin naturae nennt's die Chemie,
Spottet ihrer selbst und weiß nicht wie.

7. Verwenden Sie bei den nachfolgenden Antworten stets eine Wahrheitswerttabelle und eine Ableitung im KNS.

   (a) „Absurdität der Absurdität der Absurdität ist äquivalent mit Absurdität.“[17] Stimmt das?

   (b) Die Regel *verum (sequitur) ex quodlibet* besagt, dass Wahres aus Beliebigem folgt. Wie ist das zu verstehen?

   (c) Die Regel *ex falso quodlibet (sequitur)* besagt, dass aus Falschem Beliebiges folgt. Wie ist das zu verstehen?

[17] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe“, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 33 (1924), S. 251–256, hier: S. 253.

2
Prädikatenlogik

Betrachten wir den folgenden, viel zitierten Schluss:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
―――――――――――――――
Sokrates ist sterblich.

Dieses Argument kann mit den bisher eingeführten Mitteln der Aussagenlogik nicht überprüft werden. Um das zu können, muss man offensichtlich auch Prädikate wie *Mensch sein* oder *sterblich sein* formal erfassen. Dies soll künftig mit Großbuchstaben geschehen. Die Gegenstände, auf die diese Prädikate zutreffen, sollen im Gegensatz dazu mit Kleinbuchstaben formalisiert werden. Um auszudrücken, dass ein Ding eine bestimmte Eigenschaft besitzt, schreiben wir „Ex", was gelesen wird als „Der Gegenstand (das Ding/ das Individuum) hat die Eigenschaft E" bzw. „x ist (ein/e) E" bzw. „E von x", so dass „Mx" etwa stehen könnte für „x ist ein Mensch".

Das x ist hier kein Name für ein spezielles M, sondern ein Platzhalter für ein beliebiges Ding, einen beliebigen Gegensand mit der Eigenschaft M; x ist hier also eine Variable, genauer: eine *Gegenstandsvariable*. Wir könnten auch durchaus ein bestimmtes dieser Dinge, die M sind, herausgreifen und ihm einen Namen geben, es sozusagen taufen. Wir könnten dieses x beispielsweise „Sokrates" nennen. Auch solche *Eigennamen* formalisieren wir künftig mit Kleinbuchstaben. Für die zweite Prämisse des obigen Schlusses („Sokrates ist ein Mensch") könnte man demzufolge „Ms" schreiben.

Die erste Prämisse „Alle Menschen sind sterblich" konstatiert folgendes Verhältnis: Alle Dinge, die M sind, sind auch S. Anders formuliert: *Wenn* etwas M ist, *dann* ist es auch S; formalisiert also $\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Sx}$. Da dies auf alle Dinge zutreffen soll, die M sind (*Alle* Menschen sind sterblich), müssen wir in der Formalisierung noch eine *Quantifizierung* vornehmen. Dies wird bewerkstelligt mit Hilfe eines so genannten *Quantors*. In dem hier betrachteten Fall, in dem über *alle* geredet wird, mit Hilfe des so genannten *Allquantors*, der mit „$\forall$" dargestellt wird und wie folgt in die Formalisierung zu integrieren ist: $\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{Mx} \rightarrow \mathrm{Sx})$. Diese Formel wird wie folgt gelesen: „Für jedes Ding (für jedes Individuum/ für jeden Gegenstand), „x" genannt, gilt: Wenn x ein M ist, dann ist x ein S" bzw. – da wir M und S ja kennen: „Für jeden Gegenstand x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x ein Sterblicher (bzw. sterblich)" oder: „Alle Menschen sind sterblich". Auch erlaubt ist zu sagen: „Für alle x: Wenn M von x, dann S von x." In dem Formelausdruck markieren die Klammern also die Reichweite bzw. den *Scope* des Quantors. Der Quantor bezieht sich auf alles innerhalb des ihm nachfolgenden Klammerpaars. Der

Ausdruck „$\forall x\,(Mx \to Sx)$" ist demnach verschieden von „$\forall x\,(Mx) \to Sx$", welcher bedeutet: „Wenn alle Dinge Menschen sind, dann ist x sterblich". Wie im Falle der Junktoren, so bilden auch die durch die Quantoren bezeichneten sprachlichen Ausdrücke Standardisierungen für alle formgleichen Aussagen der Umgangssprache. Diese kennt als Variante zu „alle" nicht nur die Worte „jede" und „jeder", sondern auch verschiedene Formulierungen, die ganz ohne explizite Quantifizierung auskommen. Die wichtigsten vier Formen sind:

1. Ersetzung des Quantors durch einen Artikel

   Beispiel: „Der Mensch ist ein Lebewesen."

   Standardisierung: „Alle Menschen sind Lebewesen."

2. Gänzlicher Wegfall des Quantors

   Beispiel: „Säugetiere sind Warmblüter."

   Standardisierung: „Alle Säugetiere sind Warmblüter."

3. Wendungen mit „nur"

   Beispiel: „Nur Bayern sind CSU-Wähler."

   Standardisierung: „Alle CSU-Wähler sind Bayern."[1]

4. Wendungen mit Relativpronomina

   Beispiel: „Wer nicht wagt, der nicht gewinnt."

   Formalisierung: $\forall x\,(\neg Wx \to \neg Gx)$

Zur Verdeutlichung noch einige weitere Formalisierungen:

- Alle Blumen sind rot. = $\forall x\,(Bx \to Rx)$
- Alle Blumen sind nicht rot.[2] = $\forall x\,(Bx \to \neg Rx)$
- Nicht alle Blumen sind rot. = $\neg\forall x\,(Bx \to Rx)$
- Alle Dinge sind rot. = $\forall x\,(Rx)$ bzw. $\forall x\, Rx$
- Einige Dinge sind nicht rot. = $\neg\forall x\, Rx$

Die letzte Aussage ist identisch mit der Aussage „Nicht alles ist rot", so dass sie auf die angegebene Weise formalisiert werden kann. Denkbar wäre in diesem Falle aber auch gewesen, einen anderen Quantor zu verwenden. In der Tat gibt es neben dem Allquantor den so genannten *Existenzquantor* $\exists$, der als „einige" gelesen wird. Mit Hilfe des Existenzquantors hätte die letzte Aussage auch als „$\exists x \neg Rx$" formalisiert werden können. Der Existenzquantor steht für

[1] Nicht: „Alle Bayern sind CSU-Wähler."!

[2] Anders ausgedrückt: Keine Blume ist rot.

den Ausdruck „mindestens eins“ (weshalb er manchmal auch „Einsquantor“ genannt wird), so dass „$\exists x \neg Rx$“ wie folgt zu lesen ist: „Einiges ist nicht rot“ bzw. „Es gibt (mindestens) ein Ding (einen Gegenstand/ ein Individuum) von dem gilt, dass es nicht rot ist“ bzw. „Es existiert ein x, das nicht rot ist.“ Dementsprechend gelten folgende Formalisierungen:

- Einige Blumen sind rot. = $\exists x\,(Bx \wedge Rx)$[3]
- Einige Blumen sind nicht rot. = $\exists x\,(Bx \wedge \neg Rx)$
- Alle Blumen duften wunderbar, aber einige sind bereits verwelkt. = $\forall x\,(Bx \rightarrow Wx) \wedge \exists x\,(Bx \wedge Vx)$
- Einige Dinge sind Blumen. = $\exists x\,(Bx)$[4]

Der obige Schluss ist demnach wie folgt zu formalisieren:

Alle Menschen sind sterblich.	$\forall x\,(Mx \rightarrow Sx)$
Sokrates ist ein Mensch.	Ms
Sokrates ist sterblich.	Ss

Um die Gültigkeit dieses Schlusses zu prüfen, steht also die Sequenz $\forall x\,(Mx \rightarrow Sx),\ Ms \vdash Ss$ zur Debatte. Sequenzen dieser Art sind Gegenstand der so genannten *Quantorenlogik*, weil sie als logische Konstanten neben den Junktoren noch Quantoren besitzen. Die Quantorenlogik bezeichnet man auch als *Prädikatenlogik* in Abgrenzung zur *Aussagenlogik*.

2.1 Allbeseitigung und Existenzeinführung

Um quantorenlogische Schlussformen mit Hilfe des KNS auf formale Gültigkeit zu prüfen, benötigen wir für den Allquantor und den Existenzquantor Einführungs- und Beseitigungsregeln. Da ist zunächst einmal die Regel der „Allquantorbeseitigung“ (kurz „Allbeseitigung“) genannt:

$$\begin{array}{llll} k_1,\ldots,k_r & (k) & \forall x Fx & \\ k_1,\ldots,k_r & (l) & Fa & \forall B, k \end{array}$$

Diese Regel ist folgendermaßen zu interpretieren: „Fx“ steht für einen Ausdruck von beliebiger Komplexität, in dem die Gegenstandsvariable x mindestens einmal vorkommt. „Fx“ kann also für eine einfache *Prädikation* wie „x ist

[3] Alternative Verbalisierungen zu diesem Formalausdruck wären „Es gibt (mindestens) ein Ding von dem gilt, dass es eine Blume ist und rot ist“ bzw. „Es existiert ein x, das eine Blume und rot ist“ bzw. „Es gibt mindestens eine rote Blume“.

[4] Alternative Verbalisierung zu diesem Formalausdruck: „Es gibt (so etwas wie) Blumen“.

F“ stehen, oder aber für einen größeren Zusammenhang wie „$\forall$x (Ax $\rightarrow$ Bx)“. Mittels Allbeseitigung wird jede Gegenstandsvariable x, die sich im Bereich des Allquantors befindet, durch die gleiche Gegenstandskonstante ersetzt; die Allbeseitigung führt also zu einer *durchgängigen Umbenennung*. Das a ist also ein bestimmtes a: es ist eine Konstante (auch „Eigenname“ genannt). Es ist jedoch *frei gewählt*, d. h. man darf es ohne jede Restriktion wählen. Machen wir uns dies an einem Beispiel klar: Wenn *alle* Gegenstände eine Masse haben, *dann*, so darf mit Allbeseitigung gefolgert werden, hat auch jeder konkret benannte Gegenstand – dieses Buch, dieser Tisch, dieses Haus usw. – eine Masse.

Der obige Schluss kann nun geprüft werden und erweist sich dabei als formal gültig:

1	(1)	$\forall$x (Mx $\rightarrow$ Sx)	A
2	(2)	Ms	A
1	(3)	Ms $\rightarrow$ Ss	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	Ss	$\rightarrow$B, 3, 2

Bei der in Zeile (3) angewendeten Allbeseitigung ist man wie gesagt in der Wahl des Gegenstandes – ob s, p, q usw. – völlig frei. Man hätte demnach auch auf „Ma $\rightarrow$ Sa“ schließen können. Dies wäre jedoch strategisch unklug gewesen, da man dann die Subjunktionsbeseitigung in Zeile (4) nicht hätte anwenden können (aufgrund des nicht identischen Antecedens).

So unkompliziert und (hoffentlich) einsichtig wie die Regel der Allbeseitigung ist auch die Regel der „Existenzquantoreinführung“ bzw. „Existenzeinführung“. Sie besagt: Wenn etwas für einen konkreten Gegenstand gilt, dann, so darf man schließen, gilt dies für *mindestens einen* nicht näher spezifizierten Gegenstand (für F gilt das bereits bei $\forall$B gesagte, so dass auch hier eine durchgängige Umbennung zu erfolgen hat):

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	Fa	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\exists$xFx	$\exists$E, k

Wenn z. B. der vor mir stehende Tisch aus Holz ist, dann, so darf ich schließen, gibt es etwas, das aus Holz ist. Die obige Ableitung könnte demnach mit folgenden Existenzeinführungen fortgesetzt werden:

1, 2	(5)	$\exists$x Sx	$\exists$E, 4
1	(6)	$\exists$x (Mx $\rightarrow$ Sx)	$\exists$E, 3

2.2 Aufgaben

1. Formalisieren bzw. Verbalisieren Sie und geben Sie bei den Verbalisierungen ein passendes Beispiel:

(a) Manche Blumen sind rot, manche grün, aber jede duftet wunderbar.
(b) Wenn es Blumen gibt, dann gibt es Dinge, die wunderbar duften.
(c) Alle Raben sind schwarz und alle Schwäne weiß.
(d) Alle Raben sind schwarz und einige Schwäne sind weiß.
(e) $\exists x Fx \wedge \exists x \neg Fx$
(f) $\forall x Fx \to P$

2. Führen Sie die Ableitungen fort, indem Sie $\forall$B bzw. $\exists$E vornehmen:
   (a) 1 (1) $\forall x\,(Ax \to Bx)$ A
   (b) (1) $Pa \to Pa$ SVI
   (c) 1 (1) Pb A
   (d) 1 (1) $\forall x\,(Ax \vee Bx)$ A
   (e) 1 (1) $\forall x\,(Ax \wedge Bx) \wedge \forall x Cx$ A
   (f) 1 (1) $(Da \to \forall x\, Bx) \wedge Da$ A
3. Zeigen Sie die Gültigkeit des folgenden Schlusses: *Kein Philosoph amüsiert sich in Discos. Hans ist Philosoph und Martin amüsiert sich in Discos. Ergo: Manche sind Philosophen, manche sind es nicht.*
4. Prüfen Sie mit Hilfe des KNS den Ausdruck $\exists x\,(Ax \vee \neg Ax)$ und interpretieren Sie diesen in Hinblick auf die Leibnizsche Verwunderung darüber, dass überhaupt etwas existiert und nicht vielmehr nichts.

2.3 Alleinführung und Existenzbeseitigung

Offenkundig ist die folgende Ableitung nicht korrekt:

1	(1)	Pa	A
1	(2)	$\forall x Px$	$\forall$E, 1

Die Zulässigkeit der „Allquantoreinführung“ (kurz „Alleinführung“) in Zeile (2) würde bedeuten, dass von der Aussage „a ist P“ auf die Aussage „Alles ist P“ geschlossen werden darf. Dass von einem konkreten Gegenstand etwas ausgesagt werden kann ist aber zweifellos nicht hinreichend für eine Verallgemeinerung (für die Behauptung, dass dies für alle Gegenstände gilt). Anders sähe es aus, wenn die Ableitung folgenden Verlauf hätte:

1	(1)	$\forall x Px$	A
1	(2)	Pa	$\forall$B, 1
1	(3)	$\forall x Px$	$\forall$E, 2

Die hier vorgenommene Alleinführung erscheint unproblematisch, weil die Aussage in Zeile (2) von der mit (3) identischen Aussage in Zeile (1) abhängt. Dieses intuitive Verständnis gilt es nun formal zu fassen. Dazu muss zunächst unterschieden werden zwischen dem *freien* und dem *unfreien* bzw. *gebundenen Vorkommen* eines Zeichens. Frei kommt ein Zeichen genau dann vor, wenn es durch keinen Quantor erfasst bzw. gebunden wird. In der Aussage „$\forall xPx \rightarrow (\exists yQy \vee Ba)$“ kommen x und y gebunden, a hingegen frei vor. Die Eigenschaft, gebunden oder frei zu sein, bezieht sich in der Prädikatenlogik also auf *quantifizierbare* Ausdrücke, d. h. auf Bezeichnungen für Gegenstände.[5] Mit dieser Bestimmung des freien Vorkommens können nun die Bedingungen festgelegt werden, unter denen die Regel der Alleinführung zulässig ist:

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	Fa	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\forall xFx$	$\forall E$, k

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

I. Die Variable, mit der quantifiziert wird, kommt nicht vor in der quantifizierten Aussage (d. h. in F steht kein weiteres x, weder frei noch gebunden).

II. Die Konstante, über die quantifiziert wird, kommt nicht frei vor in:

   1. den vorausgesetzten Annahmen der quantifizierten Aussage (d. h. a kommt in den Aussagen der Zeilen k_1 bis k_r nicht frei vor)
   2. der quantifizierten Aussage (d. h. a kommt in $\forall xFx$ nicht frei vor)

Zusammengefasst: a muss für einen zwar *konkreten, aber beliebig wählbaren* Gegenstand stehen. Bei der Anwendung von $\forall E$ drohen also drei verschiedene Fehlerarten:

Verstoß gegen I:	1	(1)	$\forall x\,(Ax \wedge Bz)$	A
	1	(2)	$Ab \wedge Bz$	$\forall B$, 1
	1	(3)	$\forall z\,(Az \wedge Bz)$	$\forall E$, 2

In Zeile (3) wird mit z quantifiziert, das jedoch in (2) schon vorkommt. Die Aussage in (1) besagt, dass alle Dinge A sind und z außerdem noch B ist. Die Aussage in (3) besagt, dass alle Dinge A und B sind.

Verstoß gegen II.1:	1	(1)	$Pa \wedge Qa$	A
	1	(2)	Pa	$\wedge B$, 1
	1	(3)	$\forall x\,Px$	$\forall E$, 1

In der Voraussetzung der Aussage in Zeile (3) kommt a frei vor. Die Aussage in Zeile (1) besagt, dass a sowohl P als auch Q ist, in (3) steht „Alles ist P“.

[5] Dies gilt für die Quantorenlogik erster Stufe; in der Quantorenlogik zweiter Stufe wird auch über Prädikate quantifiziert.

Verstoß gegen II.2:	1	(1)	$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$	A
	1	(2)	$Aa \rightarrow Ba$	$\forall$B, 1
	1	(3)	$\forall x\,(Ax \rightarrow Ba)$	$\forall$E, 2

In (3) kommt a (immer noch) frei vor. Somit verstößt die Alleinführung in Zeile (3) sowohl gegen Bedingung II.2 als auch gegen die durchgängige Umbennung. Insofern könnte man Bedingung II.2 als redundant ansehen. Aufgrund der Wichtigkeit ist sie hier aber noch einmal explizit aufgenommen. Ihre Missachtung führt z. B. von „Alle Griechen sind weise“ (1) zu „Für alle x gilt: wenn x ein Grieche ist, dann ist Napoleon weise“ (3).

Betrachten wir im Gegensatz dazu die korrekte Anwendung von $\forall$E in der Sequenz $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \forall x\,(Qx \rightarrow Rx) \vdash \forall x\,(Px \rightarrow Rx)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Qx \rightarrow Rx)$	A
1	(3)	$Pa \rightarrow Qa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Qa \rightarrow Ra$	$\forall$B, 2
1, 2	(5)	$Pa \rightarrow Ra$	KS, 3, 4
1, 2	(6)	$\forall x\,(Px \rightarrow Rx)$	$\forall$E, 5

Die Anwendung von $\forall$E in Zeile (6) ist korrekt, denn das a, über das quantifiziert wurde, kommt in keiner der beiden Zeilen, von denen die Aussage in (6) abhängt, vor (also weder in Zeile (1) noch in Zeile (2)).

Ebenso umsichtig wie die Alleinführung ist die Regel der „Existenzquantorbeseitigung“, kurz „Existenzbeseitigung“, anzuwenden (weshalb die beiden Regeln $\forall$E und $\exists$B auch als *kritische Regeln* bezeichnet werden), also der Übergang von $\exists x Fx$ zu Fa (d. h. von „Es existiert etwas, von dem F gilt“ zu „Von a gilt F“). Die Existenzbeseitigung ist wie folgt definiert:

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists x Fx$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	$Fa \rightarrow C$	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	C	$\exists$B, k, l

Auch hier muss das a ein beliebig Wählbares sein. Deshalb gelten die diesbezüglichen unter $\forall$E formulierten Bedingungen in analoger Weise, d. h. a darf nicht frei vorkommen in:

1. der Konklusion (d. h. in C)
2. den Voraussetzungen der Konklusion (d. h. in den Ausdrücken der Zeilen k_1 bis l_r)
3. dem quantifizierten Ausdruck (d. h. in $\exists x Fx$)

Die vielleicht etwas befremdlich wirkende Regel der Existenzbeseitigung gewinnt an Plausibilität, wenn man sie mit dem Konstruktiven Dilemma vergleicht. Dieses besagt: Wenn eine Adjunktion gegeben ist, von der jedes Adjunktionsglied zu derselben Aussage führt, dann gilt auch diese Aussage. Nun ist eine Existenzaussage in gewissem Sinne nichts weiter als eine große Adjunktion: Die Aussage „Es gibt etwas, das F ist" meint „a ist F oder b ist F oder c ist F oder …".[6] Falls nun gilt, dass man von einem beliebigen dieser Adjunktionsglieder zu C gelangt, dann gilt dieses C. Veranschaulichen lässt sich dieser Sachverhalt mit der Alarmanlage eines Autos, die reagiert, wenn eine Scheibe eingeschlagen wird. Analog zur Definition der Existenzbeseitigung kann demnach festgestellt werden: Wenn gilt: 1. Es gibt mindestens eine eingeschlagene Scheibe und 2. Sobald eine Scheibe eingeschlagen wird, ertönt das Alarmsignal, dann darf gefolgert werden: Das Alarmsignal ertönt. Die Tatsache, dass man für diesen Schluss nicht angeben muss, welche Scheibe eingeschlagen wurde, entspricht dem formalen Sachverhalt, dass a beliebig gewählt werden kann. Betrachten wir als weiteres Beispiel den folgenden Schluss: „Alle Engel sind überirdische Wesen. Es gibt Engel. Also gibt es überirdische Wesen". Die entsprechende Sequenz $\forall x\,(Ex \rightarrow Wx),\ \exists xEx \vdash \exists xWx$ könnte folgende Ableitung besitzen:

$$\begin{array}{rlll}
1 & (1) & \forall x\,(Ex \rightarrow Wx) & A \\
2 & (2) & \exists xEx & A \\
3 & (3) & Ea & A \\
1 & (4) & Ea \rightarrow Wa & \forall B, 1 \\
1,2 & (5) & Wa & \exists B, 2, 4 \\
1,2 & (6) & \exists xWx & \exists E, 5
\end{array}$$

Grundsätzlich ist es die richtige Strategie, die existenzquantifizierte Aussage in einem eigenen Schritt anzunehmen (hier in Zeile (3) geschehen). Aber die Existenzbeseitigung in (5) verletzt Bedingung 1, denn a kommt in dem Ausdruck Wa frei vor. Um dieses Problem zu umschiffen, muss die Ableitung nach Zeile (4) auf die folgende Weise fortgesetzt werden:

$$\begin{array}{rlll}
1,3 & (5) & Wa & \rightarrow B, 4, 3 \\
1,3 & (6) & \exists xWx & \exists E, 5 \\
1 & (7) & Ea \rightarrow \exists xWx & \rightarrow E, \underline{3}, 6 \\
1,2 & (8) & \exists xWx & \exists B, 2, 7
\end{array}$$

[6] Das gilt zumindest für *endliche Gegenstandsbereiche*, in denen man alle Individuen tatsächlich aufzählen kann. In solchen Bereichen kann man allquantifizierte Aussagen auch als große Konjunktionen betrachten, d. h. Aussagen der Form $\forall xFx$ als „a ist F und b ist F und c ist F und …". Suggestiv wirkt in diesem Zusammenhang die Notation, in der der Allquantor mit einem großen Konjunktionszeichen und der Existenzquantor mit einem großen Adjunktionszeichen wiedergegeben wird, also $\bigwedge xFx$ für „Alle x sind F" und $\bigvee xFx$ für „Einige x sind F".

2.4 Aufgaben

1. Formalisieren Sie:
   (a) Aristoteles ist ein Philosoph.
   (b) Manche Griechen sind Philosophen.
   (c) Die meisten Griechen sind Philosophen.
   (d) Alles fehlt.
   (e) Keiner fehlt.
   (f) Es ist nicht alles Gold was glänzt.
   (g) Nur Logiker verstehen die Welt.
2. Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Schlüsse:
   (a) Alle Vögel können fliegen.[7] Coco ist ein Vogel. Also kann Coco fliegen.
   (b) Coco ist ein Vogel. Coco isst gerne Leinsamen. Also essen einige Vögel gerne Leinsamen.
   (c) Alle Scholastiker sind Frühaufsteher. Ramus steht immer sehr spät auf. Also ist Ramus kein Scholastiker.
   (d) Alle Philosophen haben Köpfe. Der Grieche Aristoteles ist Philosoph. Demnach haben zumindest einige Griechen Köpfe.
   (e) Kein Philosoph ist allwissend. Einige Philosophen sind Logiker. Deshalb sind einige Logiker nicht allwissend.
   (f) Die Pferde sind Säugetiere. Kein Wiederkäuer ist ein Pferd. Wenn also etwas ein Pferd ist, dann ist es zwar ein Säugetier, aber kein Wiederkäuer.
   (g) Kein Sumpfvogel ist ein Schwimmvogel. Der Storch ist ein Sumpfvogel. Also ist kein Schwimmvogel ein Storch.
   (h) $\exists \mathrm{x} \mathrm{Ax} \rightarrow \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{Dx} \wedge \neg \mathrm{Bx}),\ \forall \mathrm{x} \mathrm{Bx} \rightarrow \neg \exists \mathrm{x} \mathrm{Dx} \vdash \exists \mathrm{x}\, (\mathrm{Ax} \rightarrow \neg \forall \mathrm{x} \mathrm{Bx})$
   (i) $\exists \mathrm{x}(\mathrm{Ax} \rightarrow \mathrm{Bx}) \vdash \forall \mathrm{x} \mathrm{Ax} \rightarrow \exists \mathrm{x} \mathrm{Bx}$
   (j) „Die CSU kandidiert nur in Bayern. Wenn also jemand nicht CSU wählt, dann ist er kein Bayer.“ (Günther Beckstein)
   (k) „Stecken nicht oft die besten und fähigsten Leute in der größten Armut; die, wenn sie ein taugliches Lehrbuch bey Händen hätten, in gar kurzer Zeit es sehr weit bringen könnten?“ (Leopold Mozart, *Gründliche Violinschule*)

[7] Man beachte, dass für die Gültigkeit eines Schlusses die Wahrheit der gemachten Aussagen nicht erforderlich ist.

(l) $\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)],\ \exists x \neg Px \vdash \exists x \neg Rx$

3. Erläutern Sie die mögliche Doppeldeutigkeit der Aussage „Alle Dinge haben nicht die Eigenschaft F“.

4. Beweisen und interpretieren Sie $\vdash \exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$.

5. Was halten Sie von folgendem Schluss und der zugehörigen Ableitung?

Einige Tiere sind schwarz.
Einige Raben sind schwarz.
―――――――――――――
Einige Tiere sind Raben.

„Tx“ für „x ist ein Tier“, „Sx“ für „x ist schwarz“, „Rx“ für „x ist ein Rabe“

1	(1)	$\exists x\,(Tx \wedge Sx)$	A
2	(2)	$\exists x\,(Rx \wedge Sx)$	A
3	(3)	$Ta \wedge Sa$	A
4	(4)	$Ra \wedge Sa$	A
3	(5)	Ta	$\wedge$B, 3
4	(6)	Ra	$\wedge$B, 4
3, 4	(7)	$Ta \wedge Ra$	$\wedge$E, 5, 6
3, 4	(8)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$E, 7
3	(9)	$Ra \wedge Sa \rightarrow \exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 8
2, 3	(10)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$B, 2, 9
2	(11)	$Ta \wedge Sa \rightarrow \exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 10
1, 2	(12)	$\exists x\,(Tx \wedge Rx)$	$\exists$B, 1, 11

2.5 Zulässige Regeln der Prädikatenlogik

Fast alle umgangssprachlichen Formulierungen lassen sich auf verschiedene Weise übersetzen. So hätte man z. B. die Aussage „Keiner fehlt“ in Aufgabe 2.4, Nr. 1e sowohl mit $\forall xAx$ (= „Alle sind *An*wesend“) als auch mit $\neg\exists x\neg Ax$ (= „Keiner ist *Ab*wesend“) wiedergeben können. Die beiden Formeln sind demnach äquivalent, was sich im KNS auch zeigen lässt:

a.)	1	(1)	$\forall$xAx	A
	2	(2)	$\exists$x$\neg$Ax	A
	3	(3)	$\neg$Aa	A
	1	(4)	Aa	$\forall$B, 1
	1, 3	(5)	Aa $\wedge$ $\neg$Aa	$\wedge$E, 4, 3
	3	(6)	$\forall$xAx $\rightarrow$ Aa $\wedge$ $\neg$Aa	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 5
	3	(7)	$\neg\forall$xAx	$\neg$E, 6
		(8)	$\neg$Aa $\rightarrow$ $\neg\forall$xAx	$\rightarrow$E,$\underline{3}$, 7
	2	(9)	$\neg\forall$xAx	$\exists$B, 2, 8
	1, 2	(10)	$\forall$xAa $\wedge$ $\neg\forall$xAx	$\wedge$E, 1, 9
	1	(11)	$\exists$x$\neg$Ax $\rightarrow$ $\forall$xAx $\wedge$ $\neg\forall$xAx	$\rightarrow$E,$\underline{2}$, 10
	1	(12)	$\neg\exists$x$\neg$Ax	$\neg$E, 11

b.)	1	(1)	$\neg\exists$x$\neg$Ax	A
	2	(2)	$\neg$Aa	A
	2	(3)	$\exists$x$\neg$Ax	$\exists$E, 2
	1, 2	(4)	$\exists$x$\neg$Ax $\wedge$ $\neg\exists$x$\neg$Ax	$\wedge$E, 3, 1
	1	(5)	$\neg$Aa $\rightarrow$ $\exists$x$\neg$Ax $\wedge$ $\neg\exists$x$\neg$Ax	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4
	1	(6)	$\neg\neg$Aa	$\neg$E, 5
	1	(7)	Aa	$\neg\neg$B, 6
	1	(8)	$\forall$xAx	$\forall$E, 7

Aufgrund dieser Ableitungsbeziehungen lassen sich die folgenden zulässigen Regeln der *quantorenlogischen Dualität* (QD) formulieren:

(I)				(II)			
$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\forall$xAx		$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\exists$x$\neg$Ax	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg\exists$x$\neg$Ax	QD, k	$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\forall$xAx	QD, k

Für die Rechtfertigung von QD darf das in der Ableitung und der Regelformulierung verwendete A natürlich nicht mehr für das konkrete Prädikat „anwesend sein" stehen, sondern muß eine Variable für beliebige Prädikate bilden. Um QD auch auf Ausdrücke der Form $\neg\forall$x$\neg$Ax und $\exists$xAx anwenden zu können, muss die formale Gültigkeit von $\neg\forall$x$\neg$Ax $\dashv\vdash$ $\exists$xAx gezeigt werden:

a.)

1	(1)	$\neg\forall x\neg Ax$	A
2	(2)	$\neg\neg\neg\exists x\neg\neg Ax$	A
2	(3)	$\neg\neg\forall x\neg Ax$	QD, 2
2	(4)	$\forall x\neg Ax$	$\neg\neg$B, 3
1, 2	(5)	$\forall x\neg Ax \wedge \neg\forall x\neg Ax$	$\wedge$E, 4, 1
1	(6)	$\neg\neg\neg\exists x\neg\neg Ax \rightarrow \forall x\neg Ax \wedge \neg\forall x\neg Ax$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 5
1	(7)	$\neg\neg\neg\neg\exists x\neg\neg Ax$	$\neg$E, 6
1	(8)	$\neg\neg\exists x\neg\neg Ax$	$\neg\neg$B, 7
1	(9)	$\exists x\neg\neg Ax$	$\neg\neg$B, 8
10	(10)	$\neg\neg Aa$	A
10	(11)	Aa	$\neg\neg$B, 10
10	(12)	$\exists xAx$	$\exists$E, 11
	(13)	$\neg\neg Aa \rightarrow \exists xAx$	$\rightarrow$E, $\underline{10}$, 12
1	(14)	$\exists xAx$	$\exists$B, 9, 13

b.)

1	(1)	$\exists xAx$	A
2	(2)	$\forall x\neg Ax$	A
2	(3)	$\neg Aa$	$\forall$B, 2
2	(4)	$\neg\exists x\neg\neg Ax$	QD, 2
5	(5)	Aa	A
5	(6)	$\neg\neg Aa$	SP, 5
2, 5	(7)	$\neg Aa \wedge \neg\neg Aa$	$\wedge$E, 3, 5
5	(8)	$\forall x\neg Ax \rightarrow \neg Aa \wedge \neg\neg Aa$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 7
5	(9)	$\neg\forall x\neg Ax$	$\neg$E, 8
	(10)	$Aa \rightarrow \neg\forall x\neg Ax$	$\rightarrow$E, $\underline{5}$, 9
1	(11)	$\neg\forall x\neg Ax$	$\exists$B, 1, 10

Die Anwendung der Regel QD kann also wie folgt erweitert werden:

(III)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\forall x\neg Ax$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\exists xAx$	QD, k

(IV)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists xAx$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg\forall x\neg Ax$	QD, k

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass außerdem gilt:

(V)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\forall xAx$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\exists x\neg Ax$	QD, k

(VI)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists x\neg Ax$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg\forall xAx$	QD, k

(VII)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\forall x\neg Ax$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg\exists xAx$	QD, k

(VIII)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg\exists xAx$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\forall x\neg Ax$	QD, k

2.6 2-stellige Prädikate

Bisher wurden nur *1-stellige Prädikate* betrachtet, d. h. Ausdrücke, die mit Aussageformen mit genau einer Leerstelle bezeichnet werden wie „x ist grün", „x fliegt" oder „x ist ein Grieche". Solche Aussageformen gehen durch Einsetzung einer Gegenstandskonstanten in Aussagen über, z. B. in „Aristoteles ist ein Grieche" oder „Alberich fliegt". Analog dazu sind auch Aussageformen konstruierbar, die erst bei Einsetzung von zwei Gegenstandskonstanten in Aussagen übergehen wie „x ist größer als y" oder „x ist stolz auf y". Dementsprechend bezeichnet man die Ausdrücke „größer als" und „stolz auf" als *2-stellige Prädikate.*

Prinzipiell lässt sich alles, was mit 2-stelligen Prädikaten ausgesagt wird, auch mit Hilfe 1-stelliger Prädikate ausdrücken. So kann die Aussage „Platon bewundert Sokrates" formalisiert werden als Bp, mit Bx für „x bewundert Sokrates" und p für Platon oder eben als Bps, mit Bxy für „x bewundert y", s für „Sokrates" und p für „Platon". Bei zwei Gegenstandsvariablen können auch zwei Quantoren auftreten. So könnte $\forall x \exists y Bxy$ die Aussage „Jeder bewundert mindestens eine Person (oder Sache)" bedeuten ($\forall x \exists y$ für „Für alle gibt es mindestens eins"), was bereits dann wahr wäre, wenn jemand sich selbst bewunderte, denn x und y müssen bei diesem Ausdruck nicht verschieden sein. $\exists x \forall y Gxy$ könnte demgegenüber z. B. stehen für die Aussage „Es gibt mindestens ein Größtes" ($\exists x \forall y$ für „Es gibt mindestens eins für alle"). Freilich können 2-stellige Prädikate auch mit nur einem Quantor verbunden werden, wie bei $\forall x Bxx$ (z. B. „Jeder bewundert sich") oder $\neg \exists y Gyy$ (z. B. „Nichts ist größer als es selbst").

Die quantorenlogischen Regeln gelten in ihrer eingeführten Form auch weiter, d. h. sie können *unmodifiziert* aber *erweitert* übernommen werden. So gilt die Regel $\forall$B sowohl in Gestalt von $\forall x Fxx \vdash Faa$ als auch von $\forall x Fax \vdash Faa$ bzw. $\forall x Fxa \vdash Fba$ usw. (die Sequenz $\forall x Fxx \vdash \forall x Fax$ ist freilich nicht gestattet, allein schon weil der Allquantor in diesem Falle nicht beseitigt wird). Analog gelten für $\exists$E die Sequenzen $Faa \vdash \exists x Fxx$, $Fab \vdash \exists x Fax$ usw.

Weiterhin gelten $\forall$B und $\exists$E aber auch in Kontexten mit mehr als einem Quantor. In diesem Falle ist zu beachten, dass die jeweilige Regel auf den *Hauptquantor*, der stets der erste Quantor ist, angewendet wird, so dass $\forall x \forall y Fxy \vdash \forall y Fay$ oder $\forall x \exists y Fxy \vdash \exists y Fay$; bzw. $\exists x Fax \vdash \exists y \exists x Fyx$ oder $\forall y Fyb \vdash \exists x \forall y Fyx$ usw.

Auch die kritischen Regeln sind bei 1-stelligen und 2-stelligen Prädikaten strukturgleich. Für den komplexeren Fall von $\exists$B ergeben sich demnach unter anderem folgende Varianten:

(I)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists x Fxx$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	$Faa \rightarrow C$	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	C	$\exists$B, k, l

(II)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\exists x \forall y Fyx$	
$l_1, \ldots, l_r$	(l)	$\forall y Fya \rightarrow C$	
$k_1, \ldots, l_r$	(m)	C	$\exists$B, k, l

Die Variablenbedingungen werden nun erst vollends verständlich. So kann eine Gegenstandskonstante in einem Ausdruck *versteckt* vorkommen, wenn dieser nicht gänzlich ausdifferenziert formalisiert ist. Formalisiert man z. B. die Aussage „Nikomachos ist stolz auf Aristoteles“ als An, mit Ax für „x ist stolz auf Aristoteles“ und n für „Nikomachos“, dann kommt die Gegenstandskonstante „Aristoteles“ in dem 1-stelligen Prädikat Ax frei vor, im Gegensatz zu Sna, mit Sxy für „x ist stolz auf y“.

2.7 Aufgaben

1. Formalisieren Sie so vollständig wie möglich:

   (a) Aristoteles ist ein Philosoph.

   (b) Jeder Mensch hat eine Mutter.

   (c) Es gibt eine Medizin, die bei allem wirkt.

   (d) Alle Philosophen haben ein Vorbild.

   (e) Alles hat eine Ursache.

   (f) München ist größer als Nürnberg.

   (g) Fürth liegt zwischen Erlangen und Nürnberg.

   (h) Niemand hat Polyphem das Auge ausgestochen.

   (i) „Niemand“ hat Polyphem das Auge ausgestochen.

2. Geben Sie eine Ableitung für den Schluss *Niemand ist älter als Moses. Also ist David nicht älter als Moses.*

2.8 Identität

Eine besonders wichtige Relation ist die der Identität. *Identisch-sein* heißt, alle Eigenschaften gemeinsam haben (also sich in nichts zu unterscheiden). Demgegenüber meint *gleich-sein* (meist), mindestens eine Eigenschaft gemeinsam haben (wie bei „gleich alt“, „gleich groß“ usw.). Insofern kann Identität als *vollkommene* oder *durchgehende Gleichheit* bezeichnet werden (und dementsprechend Gleichheit als *partielle Identität*). Formal lässt sich die Identitätsrelation wie üblich mit einem Großbuchstaben darstellen, so dass „Ixy“ für „x ist identisch mit y“ steht. Daneben soll auch die Schreibweise „x=y“ zulässig sein und für „¬Ixy“ auch „x≠y“.

Die Identitätsrelation ermöglicht eine adäquate Formalisierung von Aussagen mit (expliziten oder impliziten) Zahlenangaben. So kann die Aussage „Der Mars hat zwei Monde“ nicht mit $\exists x \exists y(Mx \wedge My)$ formalisiert werden (mit „Mx“ für „x ist ein Marsmond“), da hier nicht ausgeschlossen ist, dass x und y identisch sind. Dieser Formalausdruck sagt demnach nur, dass es *mindestens einen* Marsmond gibt, was sich auch mit $\exists xMx$ ausdrücken ließe. Wird dagegen ausgeschlossen, dass x=y, wie in $\exists x\exists y[(Mx \wedge My) \wedge (x \neq y)]$, so besagt der Ausdruck, dass es *mindestens zwei* Marsmonde gibt. Um nun die Bedeutung „genau zwei“ zu erhalten, muss in den Ausdruck aufgenommen werden, dass es darüber hinaus keinen weiteren Marsmond gibt, dass es also keinen Gegenstand gibt, der ein Marsmond ist und weder mit x noch mit y identisch ist: $\exists x\exists y[((Mx \wedge My) \wedge (x \neq y)) \wedge \neg\exists z(Mz \wedge ((z \neq x) \wedge (z \neq y))]$. Für das zweite Konjunktionsglied hätte man auch (äquivalent) formulieren können, dass jeder Gegenstand, dem das Prädikat Mx zukommt, entweder mit x oder mit y identisch ist, also $\forall z[Mz \rightarrow ((z = x) \vee (z = y))]$ (wegen $x \neq y$ im ersten Konjunktionsteil lässt sich hier auch eine Adjunktion statt einer Kontravalenz verwenden). Ausdrücke der Gestalt *„genau n“* werden also formal wiedergegeben als *„mindestens n und höchstens n“*, weshalb sie ab $n > 2$ schnell recht groß werden (n steht hier für eine natürliche Zahl).

Eine besondere Gruppe bilden diejenigen Prädikate, welche mit Wendungen wie „dasjenige, das P ist“ bzw. „*das* P“ formuliert werden. Beispiele hierzu sind „die Verfasserin von *Katzengold*“ oder „derjenige, der am Sonntag den Tee mitbrachte“. Prädikate dieser Art bezeichnet man auch als *Kennzeichnungen*, wobei es unterschiedliche Ansichten darüber gibt, ob diese die Existenz- und die Einzigkeitsbedingung erfüllen müssen, ob damit also stets eine Eigenschaft bezeichnet werden soll, die nur auf einen einzigen, existierenden Gegenstand zutrifft. Wäre dies der Fall, dann wäre „Anna Lenner verfasste *Katzengold*“ zu formalisieren als $\exists x(Kx \wedge x = a) \wedge \forall x(Kx \rightarrow (x = a))$, mit „Kx“ für „x schrieb *Katzengold*“ und „a“ für „Anna Lenner“.

Die Identitätsrelation ist auch dazu geeignet, Aussagen mit mindestens zwei Quantoren näher zu bestimmen. So ist die Aussage $\exists y\forall xKxy$ mit „Kxy“ für „x ist kleiner als y“ insofern widersprüchlich, als hier x=y nicht ausgeschlossen ist und für keinen Gegenstand Kxx gilt (jedoch die Existenz eines solchen Gegenstandes hier nicht ausgeschlossen wird). Dagegen ist die Aussage $\exists y\forall x[Kxy \vee (x = y)]$, also „es gibt etwas, das zu jedem in der Relation *größer-als* oder *identisch-mit* steht“ kontingent und dann wahr, wenn es einen größten Gegenstand gibt (was schon in einem Universum mit nur einem Gegenstand oder zwei unterschiedlich großen Gegenständen gilt). Dagegen ändern sich die Wahrheitsbedingungen der Aussage $\forall x\exists yKxy$ nicht durch die Ergänzung von $x \neq y$: In beiden Fällen ist diese Aussage wahr in Universen, in denen es zu jedem Gegenstand einen größeren gibt (unabhängig davon, ob es einen kleinsten gibt), aber auch in einem Universum, in dem es überhaupt keine Gegenstände gibt.

2.9 Aufgaben

Formalisieren Sie

1. Die Erde hat einen Mond.
2. Die Erde hat genau einen Mond.
3. Phobos und Deimos sind die beiden Monde des Mars.
4. Adorno schrieb die *Dialektik der Aufklärung*.
5. Alles hat eine Ursache, nur Gott nicht.
6. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
7. „Niemand kann zwei Herren dienen; er wird entweder den einen hassen und den anderen lieben, oder er wird zu dem einen halten und den anderen verachten“ (Matthäus 6,24).

3
Syllogistik

Die *Syllogistik* bildet das Kernstück der sogenannten *traditionellen Logik*. Sie wurde in ihren wesentlichen Teilen bereits von Aristoteles in den *Ersten Analytiken* entwickelt und in der Folgezeit – wenn auch nur geringfügig – modifiziert. Ihre Blütezeit erlebte die Syllogistik während des Mittelalters in der Scholastik. Im Zuge der antischolastischen Strömungen, die sich seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts durchzusetzen begannen, geriet auch die traditionelle Logik mehr und mehr in Vergessenheit, so daß zu Eulers Zeiten nur noch ein rudimentäres Wissen darüber vorhanden war.[1] Erst mit Friedrich Ueberwegs *System der Logik* von 1857 und John Neville Keynes' *Studies and Exercises in Formal Logic* von 1884 – also über ein halbes Jahrhundert nach Eulers Tod – sollte eine Wiederentdeckung der traditionellen Logik einsetzen.[2] Mit der Syllogistik als dem Kern der traditionellen Logik dürfte Euler jedoch im wesentlichen vertraut gewesen sein, wie seine *Lettres à une princesse d'Allemagne* zeigen.

3.1 Was ist ein Syllogismus?

Ein Syllogismus ist eine Folge von drei Aussagen, wobei man die ersten beiden Aussagen als *Prämissen* und die letzte Aussage als *Konklusion* bezeichnet. Kürzt man die erste Prämisse mit P_1, die zweite Prämisse mit P_2 und die Konklusion mit K ab, dann läßt sich ein Syllogismus schematisch so darstellen:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \hline K \end{array}$$

Von dieser Sequenz soll gelten, daß die Konklusion K aus den Prämissen P_1 und P_2 logisch folgt, d. h. der waagrechte Strich in dem obigen Schema entspricht einem Ausdruck wie „also", „deshalb", „somit" usw. Der Sequenz „Alle Apfelbäume sind Obstbäume. Kein Obstbaum ist ein Nadelbaum. Also:

---

[1] Vgl. W. Risse, *Die Logik der Neuzeit*, Stuttgart-Bad Cannstatt 1964/1970; E. J. Ashworth, „Some Notes on Syllogistic in the Sixteenth and Seventeenth Centuries", *NDJFL* 11 (1970).

[2] Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an diesen beiden Texten, die nach wie vor als Standardwerke auf diesem Gebiet gelten können (vgl. J. N. Keynes, *Studies and Exercises in Formal Logic*, London 1884; F. Ueberweg, *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren*, Bonn 1857. Unter der jüngeren Literatur zur Syllogistik sind vor allem zu nennen: O. Bird, *Syllogistic and its Extensions*, Englewood Cliffs 1964 und M. Clark, *The Place of Syllogistic in Logical Theory*, Nottingham 1980).

Kein Apfelbaum ist ein Nadelbaum“ entspricht somit:

Alle Apfelbäume sind Obstbäume.
Kein Obstbaum ist ein Nadelbaum.
———
Kein Nadelbaum ist ein Apfelbaum.

Jede Aussage eines Syllogismus ist aus zwei *Termen* gebildet. Unter einem Term versteht man einen sprachlichen Ausdruck, der einen oder mehrere Gegenstände mit einer bestimmten Eigenschaft bezeichnet. So bezeichnet z. B. der Term „Obstbaum“ alle Gegenstände, denen die Eigenschaft zukommt, ein Obstbaum zu sein, oder der Term „Primzahlen größer 3“ alle Primzahlen, die größer sind als 3. Die Menge der Gegenstände, die von einem Term bezeichnet wird, nennt man die *Extension* dieses Terms. Terme wurden in der traditionellen Logik auch als *Begriffe* bezeichnet und Extensionen entsprechend als deren *Begriffsumfänge* oder *-sphären*. Die einzelnen „Exemplare“ einer Extension, also die einzelnen Gegenstände, die von einem Term bezeichnet werden, nennt man die *Instanzen* des Terms. So ist z. B. Napoleon III. eine Instanz des Terms „Franzosen“. Aussagen, die bestimmte Verhältnisse zwischen Extensionen von Termen zum Ausdruck bringen, werden in der Syllogistik als *(kategorische) Urteile* bezeichnet.[3] In der Syllogistik kennt man vier verschiedene Formen solcher Urteile und bezeichnet jede dieser Formen mit einem bestimmten Buchstaben:

– Ein *universal bejahendes Urteil* hat die Form „Alle S sind P“ (wobei S und P für zwei beliebige Terme stehen). Ein Urteil dieser Form wird als *A-Urteil* bezeichnet, die Kurzform lautet SaP.

– Ein *universal verneinendes Urteil* hat die Form „Kein S ist P“. Ein Urteil dieser Form wird als *E-Urteil* bezeichnet, die Kurzform lautet SeP.

– Ein *partikulär bejahendes Urteil* hat die Form „Einige S sind P“ und wird als *I-Urteil* bezeichnet, die Kurzform ist SiP.

– Ein *partikulär verneinendes Urteil* hat die Form „Einige S sind nicht P“ und wird als *O-Urteil* bezeichnet, Kurzform SoP.

So wird beispielsweise die Aussage „Alle Franzosen sind Dichter“ in der Syllogistik als *universal bejahendes Urteil* bezeichnet. Das Urteil entspricht der Form „Alle S sind P“, oder kurz SaP, wobei die Termvariable S für den Term „Franzosen“ und die Termvariable P für den Term „Dichter“ steht.

[3] Weil in diesen Urteilen keine Modalwörter wie „möglich“ oder „notwendig“ vorkommen dürfen, werden die aus ihnen gebildeten Schlüsse auch als *assertorische* Syllogismen bezeichnet.

Jede Urteilsform wird also in der Syllogistik als eine Sequenz von drei Buchstaben wiedergegeben. Die beiden Großbuchstaben sind Variablen für beliebige Terme; der Kleinbuchstabe, auch *Kopula* genannt, ist eine Konstante, die die Beziehung ausdrückt, in der die Extensionen der Terme zueinander stehen.[4] Die Bezeichnungen für die bejahenden Urteilsformen, also die Konstanten „a“ und „i“, leiten sich vom lateinischen „affirmo“ (= „ich bejahe“) ab; die Abkürzungen der verneinenden Formen, „e“ und „o“, entstammen dem lateinischen „nego“ (= „ich verneine“). Die Eigenschaft, bejahend oder verneinend zu sein, nennt man die *Qualität* einer Urteilsform. Die *Quantität* einer Urteilsform ist entweder universal oder partikulär, je nachdem, ob über alle (bzw. kein) S oder über einige S geurteilt wird. Jede Urteilsform hat somit eine bestimmte Quantität und eine bestimmte Qualität:

		Qualität	
		bejahend	verneinend
Quantität	universal	SaP	SeP
	partikulär	SiP	SoP

In den beiden Prämissen eines Syllogismus müssen genau drei Terme vorkommen, wovon einer der Terme, *Mittelterm* oder auch *Medius* genannt, in beiden Prämissen vorkommt. Die Reihenfolge der Prämissen wird über die Position der beiden anderen Terme, der sogenannten *Außenterme*, festgelegt. So muß der Außenterm der ersten Prämisse in der Konklusion immer an zweiter Stelle stehen. Da diese Position im Satz grammatikalisch dem Prädikat zukommt, nennt man diesen Außenterm auch *Prädikatterm* oder auch kurz *Prädikat*. Dementsprechend wird der zweite Außenterm, der in der zweiten Prämisse vorkommt und in der Konklusion an erster Stelle stehen muß, auch als *Subjektterm* oder kurz als *Subjekt* bezeichnet.[5] Je nach der Position des Medius in den beiden Prämissen ergeben sich somit vier mögliche Anordnungen der Terme eines Syllogismus, die man als *Figuren* bezeichnet:

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \text{1. Figur} & \text{2. Figur} & \text{3. Figur} & \text{4. Figur} \\
P_1: & Mx_1P & Px_1M & Mx_1P & Px_1M \\
\underline{P_2:} & \underline{Sx_2M} & \underline{Sx_2M} & \underline{Mx_2S} & \underline{Mx_2S} \\
K: & Sx_3P & Sx_3P & Sx_3P & Sx_3P
\end{array}
$$

Die Ausdrücke x_1, x_2 und x_3, die nicht notwendig voneinander verschieden

[4] D. h. die vier Kurzformen, SaP, SeP, SiP und SoP, sind keine Abkürzungen für konkrete *Urteile*, wie „Alle Dichter sind Franzosen“, sondern für Urteils*formen* wie „Alle ... sind _ _ _“.

[5] Zu beachten ist, daß die Begriffe *Subjekt* und *Prädikat* hier *termini technici* bilden, d. h. daß sie mit den grammatikalischen Begriffen nicht identisch sind. Man spricht in diesem Zusammenhang deshalb auch manchmal vom *logischen Prädikat* und vom *logischen Subjekt*.

sind, stehen hier wie auch nachfolgend für je eine der vier Konstanten „a“, „e“, „i“ oder „o“. Da jedes Urteil mit Hilfe einer dieser vier Konstanten gebildet wird und jeder Syllogismus aus drei Urteilen besteht, ergeben sich für jede Figur $4^3 = 64$ verschiedene Schlussschemata. Bei vier Figuren gibt es also insgesamt 256 solcher Schemata. Da die Reihenfolge der Prämissen durch die Position der Terme S und P festgelegt ist, kann jedes Schlussschema mit Hilfe zweier Angaben eindeutig bestimmt werden:

1. Durch die Bezeichnung der Figur.

2. Durch das Tripel, das aus den Buchstaben für die Konstanten, die die Urteilsformen bezeichnen, gebildet ist. Dieses Tripel bezeichnet man auch als *Modus*.

So läßt sich mit der Angabe „2. Figur, Modus ⟨E,A,E⟩“, oder kurz *2-EAE*, das Schlussschema $\dfrac{\begin{array}{c}PeM\\ SaM\end{array}}{SeP}$ identifizieren; oder das Schema $\dfrac{\begin{array}{c}MaP\\ SiM\end{array}}{SiP}$ aus 1-AII. Der Syllogismus

$$\dfrac{\begin{array}{c}\textit{Alle Apfelbäume sind Obstbäume.}\\ \textit{Kein Obstbaum ist ein Nadelbaum.}\end{array}}{\textit{Kein Nadelbaum ist ein Apfelbaum.}}$$

entspricht also dem Schema 4-AEE.

Da die Position der Terme in einem Syllogismus genau bestimmt ist, entspricht dem nachfolgenden Schema kein Syllogismus im oben festgelegten Sinne:

$$\dfrac{\begin{array}{c}Px_1M\\ Mx_2S\end{array}}{Px_3S}$$

In diesem Schema bildet der Außenterm der ersten Prämisse nicht das *Prädikat* der Konklusion, sondern dessen *Subjekt*. Schemata dieser Form, die systematisch wohl zuerst von Theophrast[6] in die Syllogistik eingeführt wurden, bezeichnet man als *indirekte Modi.*[7] Im Gegensatz dazu nennt man diejenigen Schlussschemata, die den obigen Bedingungen genügen, *direkte Modi.* Nur die letztgenannten Syllogismen im engeren Sinne bilden den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen.

[6]Theophrast von Eresos war Schüler des Aristoteles und seit 322 v. Chr. Leiter der von Aristoteles gegründeten peripatetischen Schule.

[7]Siehe W. & M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford 1962, S. 100.

3.2 Allgemeingültigkeit syllogistischer Schemata

Ein Syllogismus ist ein Schluss von zwei Prämissen auf eine Konklusion. Dabei soll die Konklusion K aus den beiden Prämissen P_1 und P_2 logisch folgen. *Logisch* folgt die Konklusion jedoch nur, wenn sie allein *aufgrund der Form der Prämissen* folgt, d. h. unter Absehung von jeglichem Inhalt der Prämissen. Nur in einem solchen Fall gilt, was für eine logische Folgerung gefordert wird, daß *immer wenn die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist.* So ist die Konklusion des Syllogismus

$$\begin{array}{l}\text{Einige Obstbäume sind keine Apfelbäume.}\\ \text{Alle Apfelbäume sind Laubbäume.}\\ \hline \text{Einige Laubbäume sind keine Obstbäume.}\end{array}$$

zwar wahr, aber nicht aufgrund der Form der Prämissen. Dies verdeutlicht der folgende Syllogismus, dessen Urteile zwar die gleiche Form wie im obigen Syllogismus haben, und dessen Prämissen ebenso wahr sind, dessen Konklusion aber offensichtlich falsch ist:

$$\begin{array}{l}\text{Einige Laubbäume sind keine Apfelbäume.}\\ \text{Alle Apfelbäume sind Obstbäume.}\\ \hline \text{Einige Obstbäume sind keine Laubbäume.}\end{array}$$

In die Urteilsformen des Schlussschemas 4-OAO lassen sich also Terme dergestalt einsetzen, daß die Prämissen wahr werden, die Konklusion aber falsch wird. Nun besteht das Ziel der Syllogistik jedoch darin, diejenigen Syllogismen zu ermitteln, deren Konklusionen immer dann wahr sind, wenn ihre Prämissen wahr sind. Erfüllt ein Syllogismus diese Bedingung, so wird er als *gültig* bezeichnet. Gültig heißt ein Syllogismus also genau dann, wenn bei einer Ersetzung der in ihm vorkommenden Terme durch beliebige andere Terme die logische Folgerungsbeziehung zwischen Prämissen und Konklusion bestehen bleibt. Bleibt die Gültigkeit eines Syllogismus auch nach einer beliebigen Ersetzung der in ihm vorkommenden Terme bestehen, so hängt die Gültigkeit allein von der Form der in ihm vorkommenden Urteile ab. Schlussschemata, die stets zu gültigen Syllogismen führen, wenn man für ihre Termvariablen Terme einsetzt, bezeichnet man als *allgemeingültig.* Die Syllogistik ist also eine Lehre, die die *Gültigkeit bestimmter Schlüsse* (Syllogismen) auf die *Allgemeingültigkeit bestimmter Schlussschemata* (syllogistischer Schlussschemata) zurückführt. D. h. der Syllogismus

$$\begin{array}{l}\text{Kein Unsterblicher ist ein Mensch.}\\ \text{Alle Dichter sind Menschen.}\\ \hline \text{Kein Dichter ist unsterblich.}\end{array}$$

ist gültig genau dann, wenn das ihm entsprechende Schema

$$\frac{\begin{array}{c} PeM \\ SaM \end{array}}{SeP}$$

allgemeingültig ist. Ist dieses Schema allgemeingültig? Es ist allgemeingültig genau dann, wenn jede Ersetzung von S, P und M durch Terme, die die Prämissen wahr macht, auch die Konklusion wahr macht. Wird z. B. S durch „Dichter", P durch „Unsterblicher" und M durch „Mensch" ersetzt, dann werden sowohl die Prämissen, als auch die Konklusion wahr.

In der traditionellen Logik werden insgesamt 24 Schemata als allgemeingültig bezeichnet, sechs in jeder Figur:

1. Figur	2.Figur	3.Figur	4. Figur
AAA	AOO	OAO	AAI
EAE	AEE	AAI	AEE
AII	EAE	AII	IAI
EIO	EIO	IAI	EAO
AAI	AEO	EAO	EIO
EAO	EAO	EIO	AEO

Schon Aristoteles hatte ein Verfahren entwickelt, die Allgemeingültigkeit der Schlussschemata höherer Figuren und der beiden letzten der ersten Figur, durch Zurückführung auf eines der ersten vier Schemata der ersten Figur nachzuweisen. Diese vier Schemata der ersten Figur hielt Aristoteles für *evident*, d. h. ihre Allgemeingültigkeit sollte unmittelbar einleuchtend und deshalb *keines Beweises mehr bedürftig* sein. In der Syllogistik werden sie deshalb als *vollkommene Schlussschemata* bezeichnet und die danach gebildeten Syllogismen als *vollkommene Syllogismen.*

Bei dem Verfahren, die übrigen Schemata auf die ersten vier der ersten Figur zurückzuführen, kommen verschiedene Formen von Schlüssen zur Anwendung, die in der Syllogistik *unmittelbare Schlüsse* heißen. Ein unmittelbarer Schluss liegt genau dann vor, wenn von *einer* Prämisse auf *eine* Konklusion geschlossen wird, schematisch also $\frac{P}{K}$, oder, was im nachfolgenden dasselbe bedeuten soll, $P \vdash K$. Im Gegensatz dazu wird ein syllogistischer Schluss, der die Form $P_1, P_2 \vdash K$ hat, als *mittelbarer Schluss* bezeichnet. Bei dem Rückführungsverfahren werden zwei Sorten von Schlüssen verwendet. Zum einen diejenige, die die Verhältnisse der kategorischen Urteilsformen untereinander wiedergibt. Diese Verhältnisse werden in der Syllogistik als *Oppositionen* bezeichnet. Die andere Sorte gibt die Vertauschbarkeit der Termvariablen kategorischer Urteilsformen wieder. Ein solches Vertauschen wird in der Syllogistik *Konversion* genannt.

3.2.1 Unmittelbare Schlüsse

Konversionen

Bei der Konversion wird von einem vorgegebenen kategorischen Urteil auf ein weiteres Urteil geschlossen, bei dem die Reihenfolge der Terme vertauscht ist. Die Konversion entspricht somit folgendem Schema: $SxP \vdash PxS$. Lediglich die beiden Urteilsformen I und E erfüllen dieses Schema uneingeschränkt. Man bezeichnet deshalb Schlüsse dieser Art als *reine Konversionen* oder auch als *conversio simplex*:

$SiP \vdash PiS$
$SeP \vdash PeS$

Bei einem universal bejahenden Urteil ist eine Konversion nur möglich, wenn es zu einem partikulär bejahenden Urteil abgeschwächt wird. Deshalb wird dieser Schluss auch als *unreine Konversion*, bzw. als *conversio per accidens* bezeichnet.[8] Auch ein universal verneinendes Urteil kann durch die *conversio per accidens* zu einem partikulären Urteil abgeschwächt werden:

$SaP \vdash PiS$
$SeP \vdash PoS$

Urteile der Form SoP sind nicht konvertierbar.

Oppositionen

Die vier Urteilsformen A, E, I und O stehen zueinander in bestimmten Beziehungen, den Oppositionen. Um diese Oppositionen auch in Form von unmittelbaren Schlüssen wiedergeben zu können, sei „$\neg$“ als Zeichen für die *Satznegation* eingeführt. Ein Ausdruck der Form $\neg SxP$ stehe dann für die Aussage „Es ist nicht der Fall, daß SxP“. Drei Oppositionsverhältnisse werden in der Syllogistik unterschieden:

1. Das *konträre* Verhältnis, das zwischen SaP und SeP besteht und besagt: Wenn ein Urteil der Form SaP wahr ist, dann ist das Urteil der Form SeP falsch, und wenn ein Urteil der Form SeP wahr ist, dann ist das Urteil der Form SaP falsch. D. h. von zwei Urteilen der Form SaP und SeP ist höchstens eines wahr. Aufgrund des konträren Verhältnisses von SaP und SeP sind Schlüsse der folgenden Form allgemeingültig:

   $SaP \vdash \neg SeP$
   $SeP \vdash \neg SaP$

2. Das *subkonträre* Verhältnis, das zwischen SiP und SoP besteht und besagt: Wenn ein Urteil der Form SiP falsch ist, dann ist das Urteil der Form SoP wahr, und wenn ein Urteil der Form SoP falsch ist,

[8] Diese Konversion ist also insofern „unrein“, als daß sie nicht mehr dem Schema $SxP \vdash PxS$ entspricht, sondern lediglich dem Schema $Sx_1P \vdash Px_2S$, mit $x_1 \neq x_2$.

dann ist das Urteil der Form SiP wahr. D. h. von zwei Urteilen der Form SiP und SoP ist mindestens eines wahr. Aufgrund des subkonträren Verhältnisses von SiP und SoP sind folgende Schlussschemata allgemeingültig:

$$\begin{aligned} \neg SiP &\vdash SoP \\ \neg SoP &\vdash SiP \end{aligned}$$

3. Das *kontradiktorische* Verhältnis, das sowohl zwischen SaP und SoP, als auch zwischen SeP und SiP besteht und besagt:

   – Wenn ein Urteil der Form SaP wahr ist, dann ist das Urteil der Form SoP falsch und umgekehrt.

   – Wenn ein Urteil der Form SeP wahr ist, dann ist SiP falsch und umgekehrt.

   Aufgrund der kontradiktorischen Verhältnisse von SaP und SoP einerseits und von SeP und SiP andererseits, sind die Schlüsse der folgenden Form allgemeingültig:

$$\begin{aligned} SaP &\vdash \neg SoP \\ \neg SaP &\vdash SoP \\ SoP &\vdash \neg SaP \\ \neg SoP &\vdash SaP \\ SeP &\vdash \neg SiP \\ \neg SeP &\vdash SiP \\ SiP &\vdash \neg SeP \\ \neg SiP &\vdash SeP \end{aligned}$$

Den drei Oppositionen wird meist noch das *subalterne* Verhältnis von SiP zu SaP und von SoP zu SeP beigeordnet, welches besagt:

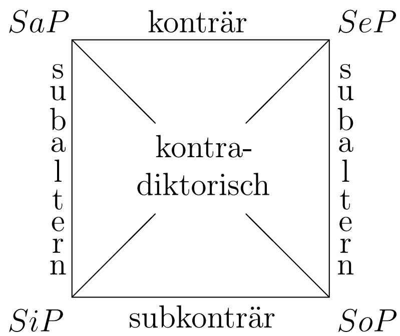
– Wenn ein Urteil der Form SaP wahr ist, dann ist auch das Urteil der Form SiP wahr, d. h. von SaP läßt sich auf SiP schließen (aber nicht umgekehrt).

– Wenn ein Urteil der Form SeP wahr ist, dann ist auch das Urteil der Form SoP wahr, d. h. von SeP läßt sich auf SoP schließen (aber nicht umgekehrt).

Aufgrund der subalternen Verhältnisse sind folgende Schlussschemata allgemeingültig:

$$\begin{aligned} SaP &\vdash SiP \\ \neg SiP &\vdash \neg SaP \\ SeP &\vdash SoP \\ \neg SoP &\vdash \neg SeP \end{aligned}$$

Alle Oppositions- und Subalternationsverhältnisse lassen sich in Form eines Diagrammes, des sogenannten *logischen Quadrates*, zusammenfassen:



3.2.2 Die Rückführung auf die erste Figur

Die bereits von Aristoteles verwendete Rückführungsmethode zeigt, wie sich alle allgemeingültigen Schlussschemata der zweiten bis vierten Figur jeweils auf bestimmte Schemata der ersten Figur logisch zurückführen lassen. Da bei jeder dieser Rückführungen unterschiedliche Regeln angewendet werden, gab man jedem Schema einen Namen, in welchem die anzuwendenden Regeln nach einem bestimmten Verfahren kodiert sind. Danach bilden die ersten drei Vokale jedes Namens den Modus des entsprechenden Schemas,[9] so daß sich folgende Übersicht der allgemeingültigen syllogistischen Schlussschemata ergibt:

1. Figur	2.Figur	3.Figur	4. Figur
BARBARA	BAROCO	BOCARDO	BAMALIP
CELARENT	CAMESTRES	DARAPTI	CALEMES
DARII	CESARE	DATISI	DIMATIS
FERIO	FESTINO	DISAMIS	FESAPO
BARBARI	CAMESTROS	FELAPTON	FRESISON
CELARONT	CESARO	FERISON	CALEMOS

Die vier hervorgehobenen Namen bezeichnen die Schemata der vollkommenen Syllogismen. Alle anderen sind nach den in ihren Namen kodierten Regeln auf diese reduzierbar. Außer den ersten drei Vokalen, die den Modus wiedergeben, gibt der Anfangsbuchstabe jedes Namens an, auf welchen der vier vollkommenen Syllogismen der jeweilige Syllogismus zurückzuführen ist, nämlich auf denjenigen mit dem gleichen Anfangsbuchstaben. So werden z. B.

[9] Tatsächlich enthält jeder der nachfolgenden Namen *genau drei* Vokale. Da wir weiter unten jedoch auch Namen mit mehr als drei Vokalen kennenlernen werden, ist der Einheitlichkeit wegen bereits hier von den *ersten drei* Vokalen die Rede (vgl. das fünfte Kapitel).

FESTINO, FRESISON und FESAPO auf FERIO zurückgeführt, oder DATISI, DISAMIS und DARAPTI auf DARII. Weiterhin haben noch folgende Buchstaben eine Bedeutung:

S bedeutet, daß die durch den vorhergehenden Vokal bezeichnete Urteilsform mittels reiner Konversion (*conversio simplex*) umzuformen ist.

P bedeutet, daß die durch den vorhergehenden Vokal bezeichnete Prämisse mittels unreiner Konversion (*conversio per accidens*) umzuformen ist. Bezeichnet der vorhergehende Vokal die Konklusion eines Schemas, so ist die Konklusion des entsprechenden vollkommenen Schemas zu konvertieren.[10]

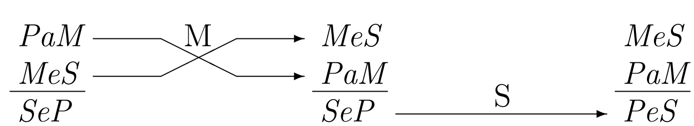
M bedeutet, daß die Reihenfolge der Prämissen zu vertauschen (*mutare*) ist.

C bedeutet, daß die gesamte Rückführung durch einen Beweis mittels Widerspruch (*per contradictionem*) zu führen ist.

Nach diesen Regeln wird beispielsweise CALEMES wie folgt auf CELARENT zurückgeführt:

1. Die Prämissen werden vertauscht (CALEMES).
2. Die Konklusion wird durch reine Konversion umgeformt (CALEMES).

CALEMES CELARENT[11]



FESAPO wird auf FERIO wie folgt zurückgeführt:

1. Die erste Prämisse wird durch reine Konversion umgeformt (FESAPO).
2. Die zweite Prämisse wird durch unreine Konversion umgeformt (FESAPO).

[10] Diese Einschränkung trifft lediglich auf BAMALIP zu, da von einem I-Urteil nicht auf ein A-Urteil geschlossen werden kann. In diesem Fall wird also das fragliche Schema nicht auf ein vollkommenes Schema *zurückgeführt*, sondern von diesem ausgehend das fragliche Schema *erzeugt* (vgl. das fünfte Kapitel).

[11] Während des Rückführungsprozesses ändern sich z. T. die semantischen Rollen der Termvariablen. So steht im obigen Falle CELARENT die Variable *P* nicht wie üblich für das Prädikat, sondern für das *Subjekt* des syllogistischen Schemas, während *S* nun für das *Prädikat* steht.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{FESAPO} & & & & \text{FERIO} \\[4pt]
PeM & \xrightarrow{\ \ S\ \ } & MeP & & MeP \\
\underline{MaS} & & \underline{MaS} & \xrightarrow{\ \ P\ \ } & \underline{SiM} \\
SoP & & SoP & & SoP
\end{array}
$$

Bei den Schlussschemata mit einem „C“ im Namen – bei BAROCO und BOCARDO – beruht die Prozedur der Rückführung auf zwei zusätzlich einzuführenden Regeln:

1. Etwas für falsch halten heißt, das kontradiktorische Gegenteil davon für wahr halten.

2. Wenn eine Annahme zu einem Widerspruch führt, dann ist das kontradiktorische Gegenteil der Annahme wahr.

Ein Syllogismus ist genau dann gültig, wenn er einem allgemeingültigen Schlussschema entspricht. Die Gültigkeit eines Syllogismus zu bestreiten, ist nach der obigen Regel (1) das gleiche wie zu behaupten, die Prämissen des Syllogismus seien wahr, seine Konklusion aber falsch. Die Konklusion für falsch halten, heißt wiederum nach Regel (1), ihre Kontradiktion für wahr halten. Betrachten wir als Beispiel einen Syllogismus, der dem Schema BAROCO entspricht. Die Gültigkeit dieses Syllogismus zu bestreiten, heißt, seine Prämissen und die *Kontradiktion seiner Konklusion* für wahr halten:

Schema für BAROCO (D. h. die Urteile der Form PaM, SoM und SoP werden als wahr anerkannt.)	Schema, das die Allgemeingültigkeit von BAROCO bestreitet (D. h. PaM, SoM und SaP gelten als wahr.)

$$
\begin{array}{ccc}
PaM & & PaM \\
\underline{SoM} & & \underline{SoM} \\
SoP & \xleftrightarrow{\text{(kontradiktorisch)}} & SaP
\end{array}
$$

Die Allgemeingültigkeit von BAROCO zu bestreiten heißt also, zu behaupten, daß es mindestens einen Fall gibt, in dem sowohl die beiden Urteile der Form PaM und SoM wahr sind, als auch ein Urteil der Form SaP $(= \neg\, SoP)$ wahr ist. In einem zweiten Schritt wird nun eine der Prämissen durch die Kontradiktion der Konklusion des ursprünglichen Urteils ersetzt, und zwar diejenige, deren bezeichnender Vokal unmittelbar vor dem „C“ steht, im Fall BAROCO also die zweite Prämisse:

$$
\begin{array}{ccc}
PaM & & PaM \\
\underline{SoM} & \nearrow & \underline{SaP} \\
SaP & &
\end{array}
$$

Bei dem auf diese Weise neu entstandenen Prämissenpaar 1-AA kann nach BARBARA auf ein Urteil der Form SaM geschlossen werden, und da beide Prämissen bereits als wahr anerkannt worden sind – die erste als (wahre) Prämisse von BAROCO, die zweite als Kontradiktion der Konklusion von BAROCO – muß auch die nun gebildete Konklusion wahr sein:

$$\begin{array}{c} PaM \\ \underline{SaP} \\ SaM \end{array}$$

Diese neue, nach BARBARA geschlossene Konklusion SaM ist jedoch die Kontradiktion von SoM, welches zuvor bereits als wahr anerkannt wurde. Die Annahme, BAROCO sei nicht allgemeingültig, führt also zu dem Widerspruch, zwei kontradiktorische Urteile der Form SaM und SoM als wahr anerkennen zu müssen. BAROCO muß also nach Regel (2) allgemeingültig sein. Der Fall BOCARDO läuft analog, nur daß hier die erste Prämisse durch die Kontradiktion der Konklusion zu ersetzen ist, da das „C" hier unmittelbar auf den ersten Vokal folgt.

Bei den sogenannten *subalternen Modi* handelt es sich um Syllogismen, deren Konklusionen partikulär sind, obwohl sie auch universell sein könnten (bei gleicher Qualität), d. h. auf deren Konklusion ein Schluss nach der Subalternation angewendet wurde, also entweder von SeP auf SoP oder von SaP auf SiP. Dies trifft auf insgesamt fünf Schlussschemata zu: BARBARI, CELARONT, CAMESTROS, CESARO und CALEMOS. Alle diese fünf Schemata werden in einem ersten Schritt jeweils auf diejenigen Schemata zurückgeführt, von denen sie sich nur in der Konklusion unterscheiden, was auch schon in ihren jeweiligen Namen sichtbar wird, die sich von denjenigen Namen der Schemata, auf die sie zurückgeführt werden, nur im jeweils letzten Vokal unterscheiden. Der zweite Schritt der Rückführung besteht dann darin, dieses neue Schema mit Hilfe der oben besprochenen Regelanwendungen auf ein vollkommenes Schema zurückzuführen.

So läßt sich z. B. von CALEMES, das wie oben gesehen auf CELARENT zurückführbar ist, mit Subalternation auf CALEMOS schließen:

$$\begin{array}{ccc} \text{CALEMES} & & \text{CALEMOS} \\ PaM & & PaM \\ \underline{MeS} & & \underline{MeS} \\ SeP & \xrightarrow{(SeP\ \vdash\ SoP)} & SoP \end{array}$$

Die Anwendung der Rückführungsmethode wird durch den Umstand erleichtert, daß die Namen der 24 allgemeingültigen Schemata in folgendem Merkvers zusammengefaßt sind, der jedem Namen seine Figur zuweist:

Barbara, Celarent, Darii, Ferioque prioris

Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae
Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,
Bocardo, Ferison habet. Quarta insuper addit
Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.[12]

Zur Untersuchung eines Syllogismus genügt es also, das dem Syllogismus entsprechende Schema mit dem auswendig gelernten Vers zu vergleichen. Stimmen Modus und Figur des Schemas mit den Vokalen und der Position eines Namens in dem Vers überein, so ist mit diesem Namen zugleich das Rückführungsverfahren des Schemas gegeben. Gibt es keine solche Übereinstimmung, so ist der Syllogismus ungültig, was über ein geeignetes Gegenbeispiel demonstriert werden muß.

3.2.3 Die Distributionslehre

Unter der Voraussetzung, daß alle durch die Merkworte vorgeschriebenen Regeln korrekt und die vollkommenen Schlussschemata allgemeingültig sind, liefert die aristotelische Rückführungsmethode ein Verfahrensschema für die Begründung der Gültigkeit eines Syllogismus (falls er gültig ist). Ein Syllogismus wird demnach als gültig bezeichnet, wenn das ihm entsprechende Schema allgemeingültig ist. Die Rückführung auf ein vollkommenes Schema erfordert jedoch häufig die Anwendung mehrerer verschiedener Regeln und kann sich als recht kompliziert erweisen. Deshalb stellt die mittelalterliche Einführung eines Merkverses, der das ganze Verfahren zusammenfaßt, eine Erleichterung dar. Eine Gültigkeitsprüfung besteht nun lediglich in dem Vergleich der Form des Syllogismus mit den 24 Namen des Verses. Zugleich sind mit diesen Namen auch die Rückführungsregeln gegeben. Bei dem Nachweis der Ungültigkeit eines Syllogismus ist der Aufwand jedoch erheblich größer. In einem solchen Fall muß ein Gegenbeispiel gefunden werden, also ein Syllogismus, der die gleiche Form wie der zu prüfende Syllogismus besitzt, und dessen Prämissen wahr, dessen Konklusion aber falsch ist. So ist z. B. der Syllogismus

$$\begin{array}{l} \text{Kein Franzose ist ein Spanier.} \\ \text{Einige Spanier sind Dichter.} \\ \hline \text{Einige Dichter sind Franzosen.} \end{array}$$

ungültig, denn das ihm entsprechende Schlussschema 4-EII ist nicht allgemeingültig, wie die Ersetzung der Variablen durch folgende Terme zeigt:

[12] Die Namen entstanden wohl zusammen mit dem Vers in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts in Paris. Die älteste, von der obigen leicht abweichende Version geht wahrscheinlich auf Petrus Hispanus zurück. Da die subalternen Modi keine eigenen Rückführungsregeln besitzen, sind sie auch nicht in den Vers aufgenommen. Vgl. A. Menne, „Kontraposition und Syllogistiksysteme“, *Arch. Gesch. Phil.* 72 (1990).

4-EII

PeM	„Steine" für P	Kein Stein ist ein Lebewesen.
MiS	„Lebewesen" für M	Einige Lebewesen sind Raben.
SiP	„Rabe" für S	Einige Raben sind Steine.

Für die Bildung eines solchen Gegenbeispiels gibt es keinerlei Konstruktionshilfen, was um so dringlicher wäre, als den 24 allgemeingültigen Schemata 232 ungültige gegenüberstehen.[13] Das Mittelalter hat jedoch auch dafür eine Erleichterung in Form der sogenannten *Distributionslehre* geschaffen. Der Begriff der Distribution findet sich zuerst im Zusammenhang mit einer Theorie der Referenz, der sog. *Suppositio* bei Wilhelm von Shyreswood um 1250.[14] Bildete diese Lehre dort einen Teil der Semantik, so wurde sie später zu einem Verfahren ausgebaut, das es ermöglicht, die Ungültigkeit von Schlussschemata nachzuweisen, ohne dabei auf konkrete Beispiele zurückgreifen zu müssen.[15]

Ganz allgemein gilt ein Term in einer Aussage als distribuiert, wenn sich diese Aussage auf alle Instanzen dieses Terms bezieht. So ist in der Aussage „Menschen sind Lebewesen" der Term „Menschen" distribuiert, da sich diese Aussage auf *alle* Menschen, d. h. auf jede Instanz dieses Terms, bezieht. Für den Term „Lebewesen" gilt dies nicht, denn es wird nicht über alle Lebewesen etwas ausgesagt, sondern lediglich über *den Teil* aller Lebewesen, die Menschen sind. Der Term „Lebewesen" ist in der obigen Aussage somit nicht distribuiert. Da in einem kategorischen Urteil etwas über das Verhältnis ausgesagt wird, in dem die Extensionen zweier Terme zueinander stehen, läßt

[13] Unter Verwendung der Konversionsregeln und der Oppositions- und Subalternationsverhältnisse lassen sich natürlich bestimmte Beispiele für mehrere Schemata verwenden. So ist das Beispiel für die Nicht-Allgemeingültigkeit von 1-IIO aufgrund von Konversion und Subalternation auch ein Gegenbeispiel für 2-, 3- und 4-IIO, sowie für 1-, 2-, 3- und 4-IIE usw.

[14] Siehe W. & M. Kneale, a.a.O., S. 246 ff.

[15] Um die Richtigkeit des Konzepts der Distribution gibt es seit den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts eine weitreichende Debatte. Ausgelöst und immer wieder angefacht wurde sie von Peter Thomas Geach, der das Konzept für falsch und die gesamte Lehre von der Distribution für einen Irrweg der traditionellen Logik hält. Geachs Aufsätze trugen jedoch die Distributionslehre nicht zu Grabe, sondern ließen im Gegenteil in den Erwiderungen eine weltweite Gemeinde der „friends of distribution" hervortreten. Die obigen Ausführungen tangieren die Streitpunkte dieser Debatte nur peripher, da sie das Konzept der Distribution nur auf kategorische Urteile der Form SaP, SeP, SiP und SoP anwenden. Vgl. P. Th. Geach, „The Doctrine of Distribution", *Mind* n. s. 65 (1956); ders., *Reference and Generality*, Ithaca und New York 1962; ders., *Logic Matters*, Berkeley and Los Angeles 1972; ders. „On Teaching about Distribution", *Philosophy* 58 (1983); E. Toms, „Mr. Geach on Distribution", *Mind* n. s. 74 (1965); D. Makinson, „Remarks on the Concept of Distribution in Traditional Logic", *Noûs* 3 (1969); W. Friedman, „Uncertainties over Distribution Dispelled", *NDJFL* 19 (1978); G. Englebretsen, „Defending Distribution", *Dialogos* 45 (1985); J. Friedman, „Towards an Adequate Definition of Distribution for First-Order Logic", *J. Phil. Log.* 24 (1995).

sich über die Distribution eines Terms auch feststellen: Ein Term kommt in einem kategorischen Urteil distribuiert vor, wenn in diesem Urteil seine gesamte Extension in Verhältnis gesetzt wird zu der (teilweisen oder gesamten) Extension eines anderen Terms. Ein Term ist also nicht „an sich" distribuiert, sondern immer nur *in einer Aussage*, bzw. *bezüglich eines weiteren Terms*.

In einem A-Urteil wie „Alle Menschen sind Lebewesen" ist der Subjektterm distribuiert und der Prädikatterm nicht distribuiert. In einem Urteil der Form SeP sind hingegen beide Terme distribuiert, da sich das darin ausgedrückte Verhältnis auf die gesamten Extensionen der beiden Terme bezieht. So ist in „Kein Apfelbaum ist ein Birnbaum" ausgesagt, daß es nicht einen Apfelbaum gibt, der ein Birnbaum ist und umgekehrt. D. h. von *jedem* Apfelbaum gilt, daß er kein Birnbaum ist, und von *jedem* Birnbaum gilt, daß er kein Apfelbaum ist. Im Gegensatz dazu sind in einem Urteil der Form SiP beide Terme nicht distribuiert, da sich dieses Verhältnis nur auf einen Teil der beiden Terme bezieht, wie in „Einige Spanier sind Dichter". In diesem Urteil soll ja der Term „Dichter" nur von *einem Teil* aller Spanier ausgesagt werden, d. h. nicht alle Spanier sind Dichter wie auch umgekehrt nicht jeder Dichter ein Spanier ist. In „Einige Spanier sind Dichter" wird also nur *ein Teil* aller Spanier mit *einem Teil* aller Dichter identifiziert. In einem Urteil der Form SoP ist der Subjektterm S nicht distribuiert, wohingegen der Prädikatterm P distribuiert ist. So wird in dem Urteil „Einige Bernoullis sind keine Mathematiker"[16] festgestellt, daß es Mitglieder der Familie Bernoulli gibt, z. B. Martha und Josef, die nicht zu der Menge der Mathematiker gehören. Martha und Josef Bernoulli sind also ausgeschlossen aus der *gesamten Menge* der Mathematiker, was keineswegs bedeuten muß, daß nicht andere Bernoullis zu dieser Menge gehören.

In den vier kategorischen Urteilen gelten für die darin vorkommenden Terme also die folgenden Verhältnisse. Demnach ist der Subjektterm in allen universellen Urteilen distribuiert und der Prädikatterm in allen verneinenden Urteilen distribuiert:

	S	P
SaP	distribuiert	nicht distribuiert
SeP	distribuiert	distribuiert
SiP	nicht distribuiert	nicht distribuiert
SoP	nicht distribuiert	distribuiert

Die Urteile der Form SaP, SiP und SoP besitzen bestimmte Mehrdeutigkeiten. So ist ein Urteil der Form „Einige S sind P" auch dann wahr, wenn *alle* S P sind, was ja auch durch die Regel der Subalternation $SaP \vdash SiP$

[16] Die Bernoullis waren eine schweizer Familie, aus der sich im 17. und 18. Jahrhundert eine Reihe von bedeutenden Mathematikern hervortaten. Einer von ihnen, Johann Bernoulli, war ein persönlicher Förderer des jungen Euler in Basel (vgl. R. Bernoulli-Sutter, *Die Familie Bernoulli*, Basel 1972).

zum Ausdruck gebracht wird. Das Urteil „Einige Apfelbäume sind Obstbäume“ ist also schon deshalb wahr, weil *alle* Apfelbäume Obstbäume sind. Die Tatsache, daß *alle* Apfelbäume Obstbäume sind, bedeutet jedoch nicht, daß der *Term* „Apfelbäume“ in dem Urteil „Einige Apfelbäume sind Obstbäume“ distribuiert ist, denn das Urteil sagt nur etwas über *einen Teil* der Extension von „Apfelbäume“ aus. Daß dies auf alle Apfelbäume zutrifft, ist für die Wahrheit des Urteils nicht notwendig. Sieht jemand mehrere Schwäne auf einem See dahingleiten, so kann er mit Recht „Einige Schwäne können schwimmen“ behaupten. Er muß nicht wissen, ob dies auf alle Schwäne zutrifft, oder ob vielleicht sogar Schwäne die einzigen Lebewesen sind, die schwimmen können, so daß „Alle schwimmenden Lebewesen sind Schwäne“ wahr wäre. Diese Unsicherheit bezüglich der tatsächlichen Verhältnisse zwischen den beiden Extensionen der Terme „Schwan“ und „Schwimmer“ in dem Urteil „Einige Schwäne sind Schwimmer“ entspricht dem Umstand, daß beide Terme hier nicht distribuiert sind. Die Distribution eines Terms läßt sich also auch beschreiben als die *Information* über die Extension eines Terms. Mit anderen Worten, ist in einem Urteil ein Term distribuiert, so ist dieses Urteil bezüglich der Extension dieses Terms informativer als ein Urteil, in dem dieser Term nicht distribuiert ist. Das Urteil „Alle Träumer sind Dichter“ besitzt in Bezug auf den Term „Träumer“ einen höheren Informationsgehalt als „Einige Träumer sind Dichter“, da „Träumer“ in dem A-Urteil distribuiert vorkommt, in dem I-Urteil aber nicht. Das A-Urteil informiert über *alle* Träumer, während das I-Urteil nur über *einige* Träumer eine Information liefert. Bezüglich des Terms „Dichter“ gilt dies jedoch nicht, da dieser Term in beiden Urteilen nicht distribuiert vorkommt, d. h. beide Urteile sagen nichts darüber aus, ob es Dichter gibt, die keine Träumer sind, ob also auch „Alle Dichter sind Träumer“ gilt.

Aus der Lehre von der Distribution lassen sich die beiden sogenannten *Distributionsregeln* ableiten, die sich auf die Gültigkeit von Syllogismen beziehen:

RI: Der Mittelterm muß in mindestens einer Prämisse distribuiert vorkommen.

RII: Wenn ein Term in der Konklusion distribuiert vorkommt, dann muß dieser Term auch in der zugehörigen Prämisse distribuiert vorkommen.

Diese beiden Regeln sind aufgrund der Beziehung zwischen dem Informationsgehalt und den Distributionsverhältnissen kategorischer Urteile leicht verständlich.

Zu (RI): Der Mittelterm M besitzt in einem Syllogismus eine „Brückenfunktion“, d. h. er „ver*mittelt*“ zwischen dem Subjektterm S und dem Prädikatterm P. Die Beziehung zwischen S und P wird also dadurch hergestellt, daß beide Terme in einem bestimmten Verhältnis zu M stehen. Ein Syllogismus kommt genau dann zustande, wenn S und P einen Teil oder die gesamte Extension von M *gemeinsam* (oder *nicht gemeinsam*) haben. Mit anderen Worten, die durch M vermittelte Gemeinsamkeit (oder Nicht-Gemeinsamkeit) von S und P bildet die Konklusion eines Syllogismus. Dieser S und P gemeinsame Teil von M ist aber nicht garantiert, wenn sich sowohl S als auch P jeweils nur auf einen Teil von M beziehen, da dies *verschiedene Teile von* M sein können. Nur wenn sich einer der beiden Außenterme auf *alle* M bezieht, ist garantiert, daß S und P *mindestens einen Teil von* M gemeinsam (oder nicht gemeinsam) haben.

Zu (RII): Ein Urteil, in dem ein Term distribuiert vorkommt, hat bezüglich dieses Terms einen höheren Informationsgehalt als ein Urteil, in dem dieser Term nicht distribuiert vorkommt. Wäre nun ein Term in der Konklusion distribuiert, in den Prämissen aber nicht, so würde die Konklusion mehr Information beinhalten als die Prämissen, was bei einem logischen Schluss unmöglich ist.

Aus beiden Regeln lassen sich nun eine Reihe von zusätzlichen Regeln ableiten, die man in der Syllogistik in zwei Gruppen einteilt:

1. Regeln der Qualität:
   a) Wenn beide Prämissen verneinend sind, dann ist keine Konklusion ableitbar.
   b) Wenn eine der Prämissen verneinend ist, dann muß auch die Konklusion verneinend sein.
   c) Wenn beide Prämissen bejahend sind, dann muß auch die Konklusion bejahend sein.
2. Regeln der Quantität:
   a) Wenn beide Prämissen partikulär sind, dann ist keine Konklusion ableitbar.
   b) Wenn eine der Prämissen partikulär ist, dann muß auch die Konklusion partikulär sein.

Mit Hilfe dieser Regeln[17] ist es nun möglich, ganze Gruppen syllogistischer Schlussschemata als nicht allgemeingültig auszuzeichnen. So läßt sich mit Hilfe der Regel (1a) feststellen, daß keines der Prämissenpaare 1-, 2-, 3-, 4-EE, 1-, 2-, 3-, 4-EO, 1-, 2-, 3-, 4-OE und 1-, 2-, 3-, 4-OO zu einem allgemeingültigen Schema führen kann. Aufgrund von (RI) entfallen des weiteren 1-IA, 1-II, 1-OA, 1-OI, 2-AA, 2-AI, 3-IO, 3-OI, 4-AI, 4-II usw. Auf diese Weise lassen sich also alle Schemata kennzeichnen, die nicht allgemeingültig sind, bis am Ende nur noch die 24 allgemeingültigen Schemata übrig bleiben.

[17] Aus diesen Hauptregeln lassen sich noch eine Reihe anderer Regeln ableiten, wie „Die Konklusion folgt immer der schwächeren Prämisse“ (aus (1b) und (2b)), oder verschiedene figurenspezifische Regeln, wie „Wenn in der vierten Figur die Konklusion verneinend ist, dann muß die erste Prämisse universell sein“ usw.

Da die Distributionslehre bestimmte Schemata *aufgrund von Regeln als nicht allgemeingültig* erweist, bildet sie eine ideale Ergänzung zur Rückführungsmethode, die bestimmte Schemata *aufgrund von Regeln als allgemeingültig* erweist. Vor der Entwicklung der Distributionslehre konnte man die Ungültigkeit eines Syllogismus nur anhand eines Gegenbeispiels demonstrieren. Dies ist von einem logischen Standpunkt aus höchst unbefriedigend, da mit der Verwendung eines Beispiels nicht *formal*, sondern *inhaltlich* argumentiert wird. Bei einem solchen Beispiel handelt es sich ja um einen Syllogismus, dessen Prämissen wahr sind und dessen Konklusion falsch ist. Somit muß ein Einvernehmen über die Wahrheit (bzw. Falschheit) der in dem Syllogismus gemachten Aussagen erzielt werden.[18] Demgegenüber erweist sich die Distributionslehre als ein großer Fortschritt, da sich mit ihrer Hilfe die Ungültigkeit eines Syllogismus formal nachweisen läßt. Denn wie durch die Rückführungsmethode die Gültigkeit eines Syllogismus anhand der Allgemeingültigkeit des ihm entsprechenden Schlussschemas nachgewiesen wird, so wird durch die Distributionslehre die Ungültigkeit eines Syllogismus anhand der Nicht-Allgemeingültigkeit des ihm entsprechenden Schemas nachgewiesen.

Von einem logischen Standpunkt ist es ebenfalls als Fortschritt anzusehen, daß die Distributionslehre nicht auf ein problematisches Konzept wie „Evidenz“ zurückgreift.[19] Bestimmte Aussagen als „evident“ zu betrachten, schien bis in die frühe Neuzeit als unproblematisch, was das Beispiel des Parallelenaxioms in der Geometrie sehr anschaulich zeigt. Aber gerade dieses Beispiel verdeutlicht auch den berechtigten Zweifel, den man aus heutiger Sicht dem gesamten Konzept der Evidenz entgegenbringt. Das gesamte Rückführungsverfahren muß deshalb als ein unbefriedigendes angesehen werden.

Da man mit Hilfe der Distributionslehre ebenfalls in der Lage ist, die 24 allgemeingültigen Schlussschemata zu erhalten, scheint die Rückführungsmethode überhaupt überflüssig. Dieser Anschein ist jedoch falsch, da die Distributionslehre eine rein „negative Methode“ darstellt, insofern als sie nur Regeln *zum Ausscheiden* ungültiger Schemata besitzt. Die allgemeingültigen Schemata bilden hier lediglich den Rest nicht ausgeschlossener Schemata. In der Distributionslehre gibt es allerdings kein Verfahren, das die *Vollständigkeit* ihrer Regeln nachweist, d. h. es besteht keine Garantie, ob sich nicht noch eine Regel ableiten läßt, aufgrund derer sich eines oder mehrere der verbliebenen

---

[18] Siehe W. D. Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, Oxford 1949, S. 32 f.; F. Ueberweg, a.a.O., S. 290 f. Die Tatsache, daß die *Existenz* eines Gegenbeispiels ein *Beweis* für die Ungültigkeit eines Schlussschemas ist, ändert nichts daran, daß die Konstruktion des Beweises *inhaltlich*, d. h. mit Hilfe konkreter Urteile und nicht anhand von Urteils*formen* erfolgen muß. Insofern hat Günther Patzig hier Ueberweg mißverstanden (vgl. G. Patzig, *Die Aristotelische Syllogistik*, Göttingen 1959, S. 186 ff.).

[19] Die Behauptung, daß eine rein formale Symbolmanipulation methodologisch unbedenklicher sei als ein Zurückgreifen auf „inhaltliche“ Evidenz, bedarf natürlich selbst einer Metaevidenz. Diese ist jedoch in unserem Kontext unproblematisch, da sie ein fester Bestandteil der Logik selbst ist (siehe W. Stegmüller, *Metaphysik, Wissenschaft, Skepsis*, Frankfurt und Wien 1954, S. 96 ff.).

24 Schemata als ungültig erweisen könnten. Die positive Auszeichnung der allgemeingültigen Schemata erfolgt allein durch die Rückführungsmethode.

3.2.4 Das *Dictum de omni et nullo*

Seit dem frühen Mittelalter wurde eine Stelle in den *Ersten Analytiken* in Form zweier Regeln wiedergegeben, die man unter der Bezeichnung *Dictum* (auch *Dici*) *de omni et nullo* zusammenfaßt:[20]

Dictum de omni: Was von einer Gesamtheit bejaht wird, wird auch von jedem Teil dieser Gesamtheit bejaht.

Dictum de nullo: Was von einer Gesamtheit verneint wird, wird auch von jedem Teil dieser Gesamtheit verneint.

Über den genauen Status dieser beiden Regeln innerhalb des Systems der Syllogistik herrscht bis heute keine Einigkeit. Neben den verschiedenen Auslegungen sind es vor allem zwei, die in unserem Zusammenhang von näherem Interesse sind.

Nach der ersten Auffassung formulieren die beiden Regeln die ersten vier Schlussschemata der ersten Figur, das *Dictum de omni* BARBARA und DARII und das *Dictum de nullo* CELARENT und FERIO. Demnach wird das *Dictum de omni* wie folgt gelesen:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">X wird von der Gesamtheit Y bejaht.
(D. h. von *allen* Y gilt, daß sie X sind.)
YaX</td></tr>
<tr><td align="center">(Die Gesamtheit) Z ist ein Teil von Y.
(D. h. *alle* Z sind Y.)
ZaY
$\Downarrow$
X wird von Z bejaht.
(D. h. (die Gesamtheit) Z ist X.)
ZaX

BARBARA</td><td align="center">Ein Teil von Z ist ein Teil von Y.
(D. h. *einige* Z sind Y.)
ZiY
$\Downarrow$
X wird *von diesem Teil* von Z bejaht.
(D. h. *diese* einige Z sind X.)
ZiX

DARII</td></tr>
</table>

In analoger Weise führt das *Dictum de nullo* auf CELARENT und FERIO. Nach diesem Verständnis ist das *Dictum* das zugrundeliegende Prinzip der ersten Figur. Somit kann es nicht nur als eine *Beschreibung* dieser Schemata, sondern als eine *Begründung* ihrer Vollkommenheit begriffen werden.[21] Das

---

[20] Siehe C. Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, Bd. I, Leipzig 1855, S. 659.

[21] Ein Vertreter dieser Auffassung war beispielsweise Christian Wolff (siehe Chr. Wolff *Philosophia rationalis sive logica*, Bd. II, Frankfurt u. Leipzig 1740, §388). Gegenwärtig

Problem der Evidenz der ersten vier Schemata wäre damit verlagert auf die Evidenz der beiden Regeln des *Dictum*. Das eigentliche Kernstück der Syllogistik, die Lehre von der Allgemeingültigkeit der syllogistischen Schlussschemata, wäre somit von einer Evidenzdebatte entlastet.

Nach der zweiten Auffassung bildet das *Dictum* den ersten Versuch zu einer Lehre der Quantifikation, der in der Nachfolgeschaft des Aristoteles schließlich in die Distributionslehre mündete.[22] So finden sich bereits im frühen Mittelalter Formulierungen des *Dictum* der folgenden Art:[23]

Dictum de omni et nullo: Was von einem distribuierten Term ausgesagt (bejaht/verneint) wird, wird auch von jedem Teil seiner Extension ausgesagt (bejaht/verneint).

Sowohl nach der ersten als auch nach der zweiten Auffassung fungiert das *Dictum* als ein zugrundeliegendes Prinzip. Die Rückführungsmethode wird legitimiert, indem die Vollkommenheit der ersten vier Schemata begründet wird. Die Distributionslehre, die die Rückführungsmethode ergänzt, findet hier ihren Ausgangspunkt. Sollten beide Interpretationen zutreffen – sie schließen sich ja nicht gegenseitig aus – dann wäre das ursprüngliche, von Aristoteles konzipierte System der Syllogistik weit mehr abgerundet als auf den vorherigen Seiten dargestellt. Wir können diese Frage hier nicht abschließend beantworten. Mit ihrer Beantwortung würden sich die behandelten Defizite von Rückführungsmethode und Distributionslehre auch nicht grundsätzlich ändern: Würde sich die erste oben dargestellte Auffassung als richtig erweisen, so wäre das Evidenzproblem der Rückführungsmethode ja nicht gelöst, sondern lediglich verschoben. Im Falle der Richtigkeit der zweiten Auffassung würde sich für die methodologischen Defizite der Distributionslehre überhaupt nichts ändern, da sich diese Auffassung lediglich auf die *Genese* dieser Lehre bezieht.

3.3 Aufgaben

1. Geben Sie je ein umgangssprachliches Beispiel für FESTINO, DISAMIS und CAMESTROS. Zeigen Sie deren Gültigkeit.

2. Begründen Sie, warum die folgenden Schlüsse gültig bzw. ungültig sind:

---

findet sie sich z. B. in: Th. Ebert, „Was ist ein vollkommener Syllogismus des Aristoteles?“, *Arch. Gesch. Phil.* 77 (1995); R. Patterson, „Aristotle's Perfect Syllogisms, Predication, and the *Dictum de omni*“, *Synthese* 96 (1993).

[22] Siehe E. J. Ashworth, *Language and Logic in the Post-Medieval Period*, Dordrecht 1974, S. 232 f.; W. & M. Kneale, a.a.O., S. 272 f. In seinen *Studies and Exercises of Formal Logic* präzisiert Keynes das Verhältnis des *Dictums* zur Distributionslehre (siehe J. N. Keynes, a.a.O., S. 255 ff.).

[23] Siehe E. J. Ashworth, a.a.O., S. 232.

(a) *Einige Dialektiker sind keine Frühaufsteher. Kein Frühaufsteher ist Hegelianer. Ergo sind einige Hegelianer keine Dialektiker.*

(b) *Einige Dialektiker sind keine Frühaufsteher. Alle Hegelianer sind Dialektiker. Ergo sind einige Hegelianer Frühaufsteher.*

(c) *Kein Dialektiker ist Frühaufsteher. Alle Hegelianer sind Frühaufsteher. Ergo ist kein Hegelianer Dialektiker.*

3. Bilden Sie wo möglich eine *Konversion:*

   (a) *Einige Dialektiker sind keine Frühaufsteher.*

   (b) *Einige Dialektiker sind Frühaufsteher.*

   (c) *Alle Hegelianer sind Frühaufsteher.*

   (d) *Kein Hegelianer ist Frühaufsteher.*

4. Bilden Sie je einen Schluss der Form 2-EAO, 1-IOO, 4-AIO und 5-IAE.

5. Bilden Sie ein logisches Quadrat, in dessen einer Ecke „Nicht jeder Mensch ist vernünftig“ steht und ein weiteres Quadrat, in dessen einer Ecke „Der Raum ist voll“ steht.

6. Zeigen Sie mit Hilfe (a) der syllogistischen Rückführungsmethode und (b) des KNS die Gültigkeit des folgenden Schlusses: „Alle Pferde sind Tiere. Also sind alle Pferdeköpfe Tierköpfe.“

7. Identifizieren Sie in dem nachfolgenden Text alle Schlüsse, evtl. unter Angabe von Figur, Modus und Namen. Geben Sie dafür Ableitungen im KNS: korrekte für die gültigen, unkorrekte für die ungültigen Schlüsse.

Dialog über den Dummen

(aus: Umberto Eco: *Das Foucaultsche Pendel*, München/Wien 1989, S. 79ff.)

„Und der Dumme?“
„Ah. Der Dumme vertut sich nicht im Benehmen. Er vertut sich im Denken. Er ist der Typ, der sagt, alle Hunde sind Haustiere, und alle Hunde bellen, aber auch die Katzen sind Haustiere, und folglich bellen sie. Oder: Alle Athener sind sterblich, und alle Einwohner von Piräus sind sterblich, also sind alle Einwohner von Piräus Athener.“
„Stimmt ja auch.“
„Ja, aber nur aus Zufall. Der Dumme kann auch was Richtiges sagen, aber aus falschen Gründen.“
„Man kann auch was Falsches sagen, wenn nur die Gründe richtig sind.“
„Bei Gott! Wozu sonst die ganze Mühe, ein animal rationale zu sein?“

„Alle großen Menschenaffen stammen von niederen Formen des Lebens ab, die Menschen stammen von niederen Formen des Lebens ab, also sind alle Menschen große Affen.“
„Nicht schlecht. Wir sind schon auf der Schwelle, wo Sie zu ahnen beginnen, daß etwas nicht stimmt, aber es ist noch eine gewisse Arbeit nötig, um herauszufinden, was genau und warum. Der Dumme ist überaus heimtückisch. Den Dämlichen erkennt man sofort (ganz zu schweigen vom Idioten), aber der Dumme argumentiert fast genau wie man selber, es fehlt nur ein winziges Stückchen. Er ist ein Meister der Paralogismen. Vor ihm kann sich kein Verlagslektor retten, er brauchte dafür eine Ewigkeit. Bücher von Dummen werden viele veröffentlicht, weil sie uns auf den ersten Blick überzeugen. Der Verlagslektor ist nicht gehalten, den Dummen zu erkennen. Die Akademie der Wissenschaften erkennt ihn nicht, warum sollten es die Verlagsleute tun?“
„Auch die Philosophie erkennt ihn nicht. Der Gottesbeweis des Anselm von Canterbury ist dumm: Gott muß existieren, weil ich ihn als ein Wesen denken kann, das alle Vollkommenheit besitzt, einschließlich der Existenz. Anselm verwechselt die Existenz im Denken mit der Existenz in der Realität.“
„Ja, aber dumm ist auch die Widerlegung von Gaunilo: Ich kann an eine Insel im Meer denken, auch wenn es diese Insel nicht gibt. Er verwechselt das Denken des Zufälligen mit dem Denken des Notwendigen.“
„Ein Kampf zwischen Dummen.“
„Sicher, und Gott amüsiert sich dabei wie närrisch. Er wollte bloß undenkbar sein, um zu demonstrieren, daß Anselm und Gaunilo dumm waren. Welch ein erhabenes Ziel für die Schöpfung, was sage ich, für den Willensakt, kraft dessen Gott sein wollte. Alles finalisiert auf die Anprangerung der kosmischen Dummheit.“
„Wir sind von Dummen umzingelt.“
„Man entgeht ihnen nicht. Alle sind dumm, außer Ihnen und mir. Oder sogar, ohne wen zu beleidigen, außer Ihnen.“ Mir scheint, hier kommt Gödels Beweis ins Spiel.“
„Keine Ahnung, ich bin ein Idiot. Pilade!“ „He, das ist meine Runde.“
„Wir teilen's dann nachher. Der Kreter Epimenides sagt, alle Kreter sind Lügner. Wenn er das sagt, er, der ein Kreter ist und die Kreter kennt, muß es wahr sein.“
„Das ist dumm.“
„Das ist Paulus. Brief an Titus. Jetzt diesen: Alle, die denken, daß Epimenides ein Lügner ist, können sich nur auf die Kreter verlassen, aber die Kreter verlassen sich nicht auf die Kreter, weshalb kein Kreter denkt, daß Epimenides ein Lügner ist.“
„Das ist dumm, oder?“
„Urteilen Sie selbst. Ich hab's Ihnen ja gesagt, es ist schwierig, den Dummen zu erkennen. Ein Dummer kann auch den Nobelpreis kriegen.“
„Lassen Sie mich mal nachdenken ... Einige von denen, die nicht glauben, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat, sind keine Fundamentalisten,

abcreinige Fundamentalisten glauben, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat - also ist keiner, der nicht glaubt, daß Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat, ein Fundamentalist. Ist das jetzt dumm oder nicht?“
„Mein Gott, schwer zu sagen ... Ich weiß nicht. Was meinen Sie?“
„Es ist in jedem Fall dumm, auch wenn es wahr wäre. Es verletzt eine Regel des Syllogismus: Man kann keine allgemeinen Schlüsse aus zwei besonderen Fällen ableiten.“
„Und wenn Sie nun der Dumme wären?“
„Dann wäre ich in guter und säkularer Gesellschaft.“
„Da haben Sie recht, die Dummheit umgibt uns. Und vielleicht ist unsere Dummheit in einer anderen Logik als der unseren ihre Weisheit. Die ganze Geschichte der Logik besteht in der Definition eines akzeptablen Begriffs der Dummheit. Nichts zu machen, sie ist zu immens. Jeder große Denker ist eines anderen Dummer.“
„Das Denken als die kohärente Form der Dummheit.“
„Nein, die Dummheit eines Denkens ist die Inkohärenz eines anderen Denkens.“
„Tiefer Gedanke. Schon zwei, gleich macht Pilade zu, und wir sind noch nicht bei den Irren.“
„Bin schon da. Den Irren erkennt man sofort. Er ist ein Dummer, der sich nicht verstellen kann. Der Dumme versucht seine These zu beweisen, er hat eine schräge Logik, aber er hat eine. Der Irre dagegen kümmert sich nicht um Logik, er operiert mit Kurzschlüssen. Alles beweist für ihn alles.“

3.4 Zur Interpretation der Syllogistik

Was macht nun ein logisches System zu einem System der traditionellen Syllogistik? Nach Strawson muß ein solches System eine Interpretation der vier kategorischen Aussageformen SaP, SeP, SiP und SoP beinhalten, die folgenden vier Bedingungen genügt:[24]

1. Die Interpretation muß alle durch das logische Quadrat dargestellten Verhältnisse zwischen den kategorischen Aussageformen als korrekt erweisen.

2. Die Interpretation muß genau die 24 Syllogismen der traditionellen Logik als korrekt erweisen.

3. Die Interpretation muß die unmittelbaren Schlussformen als korrekt erweisen.

4. Die Interpretation darf dem alltagssprachlichen Gebrauch nicht zuwider laufen.

[24] Vgl. Peter Strawson: *Introduction to Logical Theory*, London 1952, S. 163f.

Allerdings weist er darauf hin, daß es unmöglich ist, alle vier Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Der Grund hierfür liegt vor allem in der Mehrdeutigkeit des Alltagssprachgebrauchs kategorischer Aussagen. Die Normierung der unterschiedlichen Verwendungsweisen dieser Aussagen führt zu Systemen mit verschiedenen, teilweise sich ausschließenden formalen Eigenschaften, was historisch besonders deutlich durch die Kontroversen um die Anerkennung bestimmter unmittelbarer Schlussformen zum Ausdruck kam. Für ein System der traditionellen Syllogistik sollte es deshalb genügen, die obigen Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen, d. h. jedes Syllogistiksystem sollte die 24 von der Tradition als gültig erachteten Syllogismen und die zu ihrer Rechtfertigung verwendeten Relationen des logischen Quadrates als korrekt erweisen. Aus dieser Forderung folgt, daß nicht jede Interpretation der vier kategorischen Aussagen ein System der Syllogistik bildet. Weiter ist festzustellen, daß es in der Geschichte mehrere verschiedene Syllogistiksysteme gab, ohne daß sich eines davon als „das richtige“ auszeichnen ließe. Vielmehr erweisen sich diese Systeme, die jedes für sich Resultat der Normierung eines bestimmten Sprachgebrauchs ist, als mehr oder weniger geeignet für den Zweck ihrer Normierung. Wie sich zeigen wird, setzt eine solche *pragmatische Bewertung* von Syllogistiksystemen eine genaue Kenntnis ihrer formalen Eigenschaften voraus. Einige dieser Eigenschaften sollen hier vorgestellt werden.

3.4.1 Strawsons System

In seiner *Introduction to Logical Theory* vergleicht Strawson drei Interpretationen kategorischer Aussagen. Diese Interpretationen unterscheiden sich in erster Linie in ihrer *Existenzvoraussetzung.* Unter der von ihm als „traditionell“ bezeichneten Interpretation setzt die Wahrheit jeder kategorischen Aussage die Existenz von Dingen voraus, die durch den Subjektterm bezeichnet werden. Diese Interpretation wollen wir, Keynes folgend, von nun an *Millsche Interpretation* nennen.[25] Gibt man sie, wie Strawson, in prädikatenlogischer und mengentheoretischer Notation wieder, so lautet sie:

$$\begin{array}{lll}
SaP & \neg\exists x(Sx \wedge \neg Px) \wedge \exists x Sx & (s\bar{p} = \emptyset) \wedge (s \neq \emptyset) \\
SeP & \neg\exists x(Sx \wedge Px) \wedge \exists x Sx & (sp = \emptyset) \wedge (s \neq \emptyset) \\
SiP & \exists x(Sx \wedge Px) & (sp \neq \emptyset) \\
SoP & \exists x(Sx \wedge \neg Px) & (s\bar{p} \neq \emptyset)
\end{array}$$

Die *moderne Interpretation* gibt Strawson in der seit den *Principia Mathematica* üblichen Weise wieder:

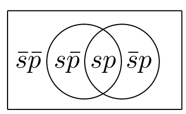
[25] Vgl. John Neville Keynes: *Studies and Exercises in Formal Logic. Including a Generalization of Logical Processes in their Application to complex Inferences*, London 1884, S. 187.

SaP	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px)$ [bzw. $\forall x(Sx \rightarrow Px)$]	$s\bar{p} = \emptyset$
SeP	$\neg\exists x(Sx \wedge Px)$ [bzw. $\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)$]	$sp = \emptyset$
SiP	$\exists x(Sx \wedge Px)$	$sp \neq \emptyset$
SoP	$\exists x(Sx \wedge \neg Px)$	$s\bar{p} \neq \emptyset$

In einem Vergleich mit diesen beiden Interpretationen entwickelt Strawson eine eigene, die im Gegensatz zu den beiden anderen die von ihm angeführten formalen Bedingungen (1)–(3) uneingeschränkt erfüllt:[26]

SaP	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px) \wedge \exists xSx \wedge \exists x\neg Px$	$(s\bar{p} = \emptyset) \wedge (s \neq \emptyset) \wedge (\bar{p} \neq \emptyset)$
SeP	$\neg\exists x(Sx \wedge Px) \wedge \exists xSx \wedge \exists xPx$	$(sp = \emptyset) \wedge (s \neq \emptyset) \wedge (p \neq \emptyset)$
SiP	$\exists x(Sx \wedge Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$	$(sp \neq \emptyset) \vee (s = \emptyset) \vee (p = \emptyset)$
SoP	$\exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$	$(s\bar{p} \neq \emptyset) \vee (s = \emptyset) \vee (\bar{p} = \emptyset)$

Für zwei Mengen s und p und deren Komplemente $\bar{s}$ und $\bar{p}$ sind insgesamt vier Schnittmengen möglich – $\bar{s}\bar{p}$, $s\bar{p}$, sp und $\bar{s}p$:



Sei eine leere Schnittmenge mit „∅“ und eine nichtleere Schnittmenge mit „I“ abgekürzt, so können wir die von Strawson untersuchten Interpretationen auch mit Hilfe von Quadrupeln der Form $\langle\, \bar{s}\bar{p}\; s\bar{p}\; sp\; \bar{s}p \,\rangle$ darstellen:

	Millsche Interpretation	moderne Interpretation	Strawsons Interpretation
SaP	$\langle\, \_\ \emptyset\ \mathrm{I}\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \emptyset\ \_\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \mathrm{I}\ \emptyset\ \mathrm{I}\ \_ \,\rangle$
SeP	$\langle\, \_\ \mathrm{I}\ \emptyset\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \_\ \emptyset\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \mathrm{I}\ \emptyset\ \mathrm{I} \,\rangle$
SiP	$\langle\, \_\ \_\ \mathrm{I}\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \_\ \mathrm{I}\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \_\ \mathrm{I}\ \_ \,\rangle \vee \langle\, \_\ \emptyset\ \emptyset\ \_ \,\rangle \vee \langle\, \_\ \_\ \emptyset\ \emptyset \,\rangle$
SoP	$\langle\, \_\ \mathrm{I}\ \_\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \mathrm{I}\ \_\ \_ \,\rangle$	$\langle\, \_\ \mathrm{I}\ \_\ \_ \,\rangle \vee \langle\, \_\ \emptyset\ \emptyset\ \_ \,\rangle \vee \langle\, \emptyset\ \emptyset\ \_\ \_ \,\rangle$

Notieren wir die Tatsache, daß eine Aussage wahr ist mit „1“, und daß sie falsch ist mit „0“, so ergibt sich für Strawsons Interpretation der kategorischen Aussageformen die in Tabelle 1 dargestellte Verteilung.[27]
Aus dieser Tabelle lassen sich die im logischen Quadrat dargestellten Verhältnisse unmittelbar ablesen: Das kontradiktorische Verhältnis zwischen SaP und SoP und zwischen SeP und SiP zeigt sich dadurch, daß in jeder Zeile der Tabelle, in der einer Aussage der einen Form der Wert „1“ zugeordnet

[26] Siehe unten.

[27] Diese Tabelle unterscheidet sich insofern von einer Wahrheitstafel der Aussagenlogik, als die Zeichen „I“ und „∅“ im linken Tabellenfeld *nicht Wahrheitswerte*, sondern die *Existenz von Dingen* anzeigen. Die obige Tabelle korreliert also die Existenz bestimmter Gegenstände mit den Wahrheitswerten von Aussagen einer bestimmter Form.

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	I	∅	∅	0	0	1	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
I	∅	∅	I	0	0	1	1
I	∅	∅	∅	0	0	1	1
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1
∅	I	∅	∅	0	0	1	1
∅	∅	I	I	0	0	1	1
∅	∅	I	∅	0	0	1	1
∅	∅	∅	I	0	0	1	1
∅	∅	∅	∅	0	0	1	1

Tabelle 3.1: Strawsons Interpretation kategorischer Aussagen

ist, die Aussage der kontradiktorischen Form den Wert „0“ besitzt und vice versa. Für das subalterne Verhältnis von SiP zu SaP und von SoP zu SeP gilt, daß in jeder Zeile, in der der Wert einer Aussage der einen Form „1“ beträgt, auch deren subalterne Form diesen Wert hat. Das konträre Verhältnis zwischen SaP und SeP erkennt man daran, daß die Tabelle keine Zeile aufweist, in der beide Aussagen eine Eins besitzen. Schließlich gilt für das subkonträre Verhältnis zwischen SiP und SoP, daß beide in derselben Zeile eine Eins besitzen können, nicht aber eine Null.

Unter moderner Interpretation ergibt sich eine Verteilung, bei der von allen Verhältnissen des logischen Quadrates nur das kontradiktorische zwischen SaP und SoP und zwischen SeP und SiP gilt (vgl. Tabelle 2). Nach obiger Festlegung stellt die moderne Interpretation also kein System der Syllogistik dar.

Die in Tabelle 3 dargestellte Verteilung unter Millscher Interpretation zeigt, daß dort nur das konträre Verhältnis zwischen SaP und SeP und das subalterne von SiP zu SaP, bzw. von SoP zu SeP gültig ist, da in den Zeilen 7, 8, 15 und 16 Aussagen jeder Form falsch sind (also genau dann, wenn es keine Dinge gibt, die S sind). Demnach kann diese Interpretation ebenfalls nicht als Syllogistiksystem bezeichnet werden.

Nach Strawson gibt es jedoch zwei Möglichkeiten, auch unter dieser Interpretation die Verhältnisse des logischen Quadrates zu erhalten. Zum einen kann man einen zusätzlichen Wahrheitswert – z. B. „sinnlos“ – einführen, der genau dann einer Aussage zugeordnet wird, wenn eine Situation vorliegt, in

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	I	∅	∅	0	1	0	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
I	∅	∅	I	1	1	0	0
I	∅	∅	∅	1	1	0	0
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1
∅	I	∅	∅	0	1	0	1
∅	∅	I	I	1	0	1	0
∅	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	∅	∅	I	1	1	0	0
∅	∅	∅	∅	1	1	0	0

Tabelle 3.2: Moderne Interpretation kategorischer Aussagen

der es keine S gibt. Strawson plausibilisiert dies anhand des folgenden Beispiels: Angenommen, John hat keine Kinder. Dann könnte man eine Aussage wie „Alle (einige) Kinder von John schlafen (nicht)“ durchaus als sinnlos bezeichnen. Kürzen wir „sinnlos“ mit „-“ ab, so ändert sich die Verteilung der Millschen Interpretation von Tabelle 3 dergestalt, daß nun alle Verhältnisse des logischen Quadrates gelten (vgl. Tabelle 4).

Die zweite Möglichkeit, die Verhältnisse des logischen Quadrates unter Millscher Interpretation zu erhalten, besteht nach Strawson in der Einschränkung des Skopus auf diejenigen Situationen, auf die sich kategorische Aussagen sinnvoll beziehen können. Auch diesen Fall veranschaulicht Strawson mit Hilfe von John. Wenn John nämlich keine Kinder habe, so Strawson, dann könne sich die Frage, ob alle (einige) seiner Kinder (nicht) schlafen, überhaupt nicht stellen. Kategorische Aussagen wären dieser Auffassung zufolge auf bestimmte Fälle nicht sinnvoll anwendbar und somit aus der Betrachtung der möglichen Situationen auszuschließen. Die Tabelle müßte somit um die Zeilen 7, 8, 15 und 16 verkürzt werden und würde dann die Verhältnisse des logischen Quadrates korrekt wiedergeben (vgl. Tabelle 5). Nach Bedingung (1) wäre die Millsche Interpretation also als System der Syllogistik zu akzeptieren.

Allerdings erfüllt sie Bedingung (2) nicht vollständig. Die Millsche Interpretation unterstellt für jede kategorische Aussage die Existenz von Gegenständen, die durch den Subjektterm bezeichnet werden. Für *affirmative Aussagen* (d. h. Aussagen der Form SaP oder SiP) wird diese Voraussetzung

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	I	∅	∅	0	1	0	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
I	∅	∅	I	0	0	0	0
I	∅	∅	∅	0	0	0	0
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1
∅	I	∅	∅	0	1	0	1
∅	∅	I	I	1	0	1	0
∅	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	∅	∅	I	0	0	0	0
∅	∅	∅	∅	0	0	0	0

Tabelle 3.3: Millsche Interpretation kategorischer Aussagen

durch die Behauptung erfüllt, daß es Dinge gibt, die sowohl S als auch P sind, daß also $sp \neq \emptyset$. Die quasi nur mitbehauptete Existenz von Dingen, die P sind, sei als *indirekte* und die vorrangig behauptete als *direkte* Existenzvoraussetzung bezeichnet. Gibt es in einer Aussage der Form SxP eine direkte Existenzvoraussetzung für Dinge, die von dem Term S (P) bezeichnet werden, so schreiben wir S^+ (P^+). Gilt bezüglich des Terms S (P) eine indirekte Existenzvoraussetzung, so schreiben wir $S^{(+)}$ ($P^{(+)}$). Die Allgemeingültigkeit eines Syllogismus ist insofern von der Existenzvoraussetzung der darin vorkommenden Aussageformen abhängig, als in der Konklusion eines korrekten Schlusses nur die Existenz derjenigen Dinge behauptet werden kann, die bereits in den Prämissen als existent behauptet werden. Eine Schlussform ist also *nicht* allgemeingültig, wenn in der Konklusion die Existenz von Dingen behauptet wird, die in den Prämissen nicht behauptet wird. Unter Millscher Interpretation ist dies bei zwei Syllogismen der Fall, nämlich bei den Modi *aee* und *aeo* der vierten Figur:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{aee} & \textbf{aeo} \\
P^+aM^{(+)} & P^+aM^{(+)} \\
\underline{M^+eS} & \underline{M^+eS} \\
S^+eP & S^+oP
\end{array}
$$

In beiden Syllogismen wird in der Konklusion, nicht aber in den Prämissen die Existenz von Dingen behauptet, die S sind. Es wird also in der Konklu-

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	$\emptyset$	0	0	1	1
I	I	$\emptyset$	I	0	1	0	1
I	I	$\emptyset$	$\emptyset$	0	1	0	1
I	$\emptyset$	I	I	1	0	1	0
I	$\emptyset$	I	$\emptyset$	1	0	1	0
I	$\emptyset$	$\emptyset$	I	-	-	-	-
I	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	-	-	-
$\emptyset$	I	I	I	0	0	1	1
$\emptyset$	I	I	$\emptyset$	0	0	1	1
$\emptyset$	I	$\emptyset$	I	0	1	0	1
$\emptyset$	I	$\emptyset$	$\emptyset$	0	1	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	I	I	1	0	1	0
$\emptyset$	$\emptyset$	I	$\emptyset$	1	0	1	0
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	I	-	-	-	-
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	-	-	-

Tabelle 3.4: Millsche Interpretation mit dem Wert „sinnlos“

sion mehr behauptet, als durch die Prämissen gegeben ist. Somit sind beide Syllogismen unter Millscher Interpretation unzulässig.[28] Unter den drei von Strawson beschriebenen Interpretationen kategorischer Aussagen bildet also allein seine eigene ein System der Syllogistik im oben explizierten Sinne.

3.4.2 Interpretationen kategorischer Aussagen

Im Lauf der Geschichte gab es eine Vielzahl von Interpretationen kategorischer Aussagen. So stellte Lewis Carroll eine Interpretation vor, unter der jede kategorische Form außer SeP, die Existenz von Dingen voraussetzt, die durch den Subjektterm bezeichnet werden:[29]

$$\begin{array}{ll} SaP & \langle\,\_\;\emptyset\,\mathrm{I}\;\_\,\rangle \\ SeP & \langle\,\_\;\_\;\emptyset\;\_\,\rangle \\ SiP & \langle\,\_\;\_\;\mathrm{I}\;\_\,\rangle \\ SoP & \langle\,\_\;\mathrm{I}\;\_\;\_\,\rangle \end{array}$$

Carroll begründet seine Interpretation damit, daß der Ausdruck „Kein“ alltagssprachlich auch dann verwendet werde, wenn er sich auf nichtexistieren-

[28]Die moderne Interpretation erfüllt die zweite Bedingung ebenfalls nicht. Dort besitzen ausschließlich *partikuläre Aussagen* (d. h. Aussagen der Form SiP oder SoP) eine Existenzvoraussetzung, weshalb alle Syllogismen mit *universellen Prämissen* (d. h. Aussagen der Form SaP oder SeP) und partikulärer Konklusion ungültig werden.

[29]S. Keynes a.a.O., S. 186.

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	$\emptyset$	0	0	1	1
I	I	$\emptyset$	I	0	1	0	1
I	I	$\emptyset$	$\emptyset$	0	1	0	1
I	$\emptyset$	I	I	1	0	1	0
I	$\emptyset$	I	$\emptyset$	1	0	1	0
$\emptyset$	I	I	I	0	0	1	1
$\emptyset$	I	I	$\emptyset$	0	0	1	1
$\emptyset$	I	$\emptyset$	I	0	1	0	1
$\emptyset$	I	$\emptyset$	$\emptyset$	0	1	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	I	I	1	0	1	0
$\emptyset$	$\emptyset$	I	$\emptyset$	1	0	1	0

Tabelle 3.5: Millsche Interpretation mit eingeschränktem Skopus

de Gegenstände beziehe, was bei „Alle“ und „Einige“ nicht der Fall sei.[30] Der Modus *aeo* der zweiten Figur und *aeo* der vierten Figur sind hier ungültig, außerdem gelten die im logischen Quadrat dargestellten Verhältnisse nur noch teilweise bzw. modifiziert.

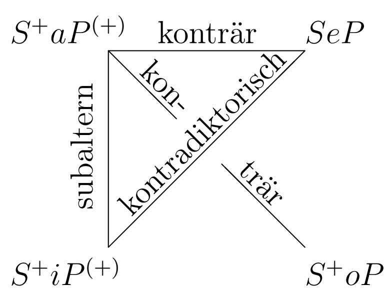


Abbildung 3.1: Das logische Quadrat unter Carrolls Interpretation

Eine Interpretation ohne Existenzvoraussetzung der durch den Subjektterm bezeichneten Gegenstände wird Leśniewski zugeschrieben.[31] Auch unter dieser Interpretation ist nur ein Teil der Verhältnisse des logischen Quadrates gültig (vgl. Tabelle 6):

[30] Vgl. ebd.

[31] Vgl. Czesław Lejewski: *Zu Leśniewskis Ontologie*. In: *Ratio* 2 (1957/58), S. 50–77. Diese Interpretation findet sich jedoch bereits in Jørgen Jørgensen: *A Treatise of Formal Logic. Its Evolution and Main Branches with its Relations to Mathematics and Philosophy*, vol. II, Kopenhagen 1931; Repr. New York 1962, S. 143.

SaP	$\forall x(Sx \rightarrow Px)$	[bzw. $\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px)$]
SeP	$\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)$	[bzw. $\neg\exists x(Sx \wedge Px)$]
SiP	$\exists x(Sx \rightarrow Px)$	[bzw. $\exists x \neg Sx \vee \exists x Px$]
SoP	$\exists x(Sx \rightarrow \neg Px)$	[bzw. $\exists x \neg Sx \vee \exists x \neg Px$]

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	1	1
I	I	∅	∅	0	1	1	1
I	∅	I	I	1	0	1	1
I	∅	I	∅	1	0	1	1
I	∅	∅	I	1	1	1	1
I	∅	∅	∅	1	1	1	1
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	1	1
∅	I	∅	∅	0	1	0	1
∅	∅	I	I	1	0	1	1
∅	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	∅	∅	I	1	1	1	1
∅	∅	∅	∅	1	1	0	0

Tabelle 3.6: Leśniewskis Interpretation kategorischer Aussagen

Wilhelm von Ockham wird die erste Verwendung der Interpretation zugeschrieben, wonach ausschließlich affirmative Aussageformen die Existenz von Gegenständen voraussetzen, die durch den Subjektterm bezeichnet werden.[32] Die Ockhamsche Interpretation zeigt die enge Beziehung zwischen informalem Sprachgebrauch und den formalen Eigenschaften einer Rekonstruktion besonders deutlich. So interpretiert Ockham Aussagen der Form „Alle S sind P" als $\forall x(Sx \rightarrow Px) \wedge \exists x Sx$ (bzw. $\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px) \wedge \exists x Sx$), und dazu kontradiktorische Aussagen als deren Negation „Nicht alle S sind P": $\neg(\forall x(Sx \rightarrow Px) \wedge \exists x Sx)$ (bzw. $\exists x(Sx \wedge \neg Px) \vee \neg\exists x Sx$):

SaP	$\langle \_ \, \emptyset \, \mathrm{I} \, \_ \rangle$
SeP	$\langle \_ \, \_ \, \emptyset \, \_ \rangle$
SiP	$\langle \_ \, \_ \, \mathrm{I} \, \_ \rangle$
SoP	$\langle \_ \, \mathrm{I} \, \_ \, \_ \rangle \vee \langle \_ \, \emptyset \, \emptyset \, \_ \rangle$

[32] S. Michael Clark: *The Place of Syllogistic in Logical Theory*, Nottingham 1980, S. 18f., der diese Position ebenfalls vertritt.

Unter Ockhamscher Interpretation erweisen sich genau die 24 Syllogismen der traditionellen Logik als korrekt und man erhält ohne Einschränkung des Skopus alle Verhältnisse des logischen Quadrates (vgl. Tabelle 7).

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	I	∅	∅	0	1	0	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
I	∅	∅	I	0	1	0	1
I	∅	∅	∅	0	1	0	1
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1
∅	I	∅	∅	0	1	0	1
∅	∅	I	I	1	0	1	0
∅	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	∅	∅	I	0	1	0	1
∅	∅	∅	∅	0	1	0	1

Tabelle 3.7: Ockhamsche Interpretation kategorischer Aussagen

Unter der allgemein als *traditionell* bezeichneten Interpretation wird für die Wahrheit jeder kategorischen Aussage die Existenz sowohl von Dingen vorausgesetzt, die S sind, als auch von Dingen, die P sind:[33]

$$\begin{array}{ll} SaP & \langle \_\,\emptyset\,\mathrm{I}\,\_ \rangle \\ SeP & \langle \_\,\mathrm{I}\,\emptyset\,\mathrm{I} \rangle \\ SiP & \langle \_\,\_\,\mathrm{I}\,\_ \rangle \\ SoP & \langle \_\,\mathrm{I}\,\mathrm{I}\,\_ \rangle \vee \langle \_\,\mathrm{I}\,\_\,\mathrm{I} \rangle \end{array}$$

Bei eingeschränktem Skopus gelten unter dieser Interpretation ebenfalls die Verhältnisse des logischen Quadrates und die 24 Syllogismen der Tradition (vgl. Tabelle 8).[34]
Von Menne stammt eine Interpretation, die in einem möglichst hohen Maße dem informalen Sprachgebrauch zu entsprechen versucht.[35] Mennes Vor-

[33]Vgl. William & Martha Kneale: *The Development of Logic*, Oxford 1962, S. 60.
[34]Es sind hier alle Fälle auszuschließen, in denen mindestens eine Sorte Gegenstände, S oder P, nicht existiert, da in diesen Fällen alle Aussagen der vier kategorischen Formen falsch sind.
[35]Vgl. Albert Menne: *Logik und Existenz. Eine logistische Analyse der kategorischen Syllogismusfunktoren und das Problem der Nullklasse*, Meisenheim am Glan 1954, S. 52–56.

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	I	∅	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1
∅	∅	I	I	1	0	1	0
∅	∅	I	∅	1	0	1	0

Tabelle 3.8: Traditionelle Interpretation mit eingeschränktem Skopus

schlag sieht vor, die Interpretation kategorischer Aussageformen auf *definite Terme* zu beschränken, also festzulegen, daß es zu jeder nichtleeren Menge, die von einem Term bezeichnet wird, eine nichtleere Komplementmenge gibt. Da Menne für jeden Term einer kategorischen Aussageform eine Existenzvoraussetzung macht, gelangt er zu einer Interpretation, für die der Skopus einzuschränken ist, um die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen:

$$\begin{array}{ll} SaP & \langle \mathrm{I}\,\emptyset\,\mathrm{I}\,\_\,\rangle \\ SeP & \langle\,\_\,\mathrm{I}\,\emptyset\,\mathrm{I}\rangle \\ SiP & \langle \mathrm{I}\,\_\,\mathrm{I}\,\_\,\rangle \vee \langle\,\_\,\mathrm{I}\,\mathrm{I}\,\mathrm{I}\rangle \\ SoP & \langle\,\_\,\mathrm{I}\,\_\,\mathrm{I}\rangle \vee \langle \mathrm{I}\,\mathrm{I}\,\mathrm{I}\,\_\,\rangle \end{array}$$

$\bar{s}\bar{p}$	$s\bar{p}$	sp	$\bar{s}p$	SaP	SeP	SiP	SoP
I	I	I	I	0	0	1	1
I	I	I	∅	0	0	1	1
I	I	∅	I	0	1	0	1
I	∅	I	I	1	0	1	0
I	∅	I	∅	1	0	1	0
∅	I	I	I	0	0	1	1
∅	I	∅	I	0	1	0	1

Tabelle 3.9: Mennes Interpretation mit eingeschränktem Skopus

Bei der Beschränkung auf definite Terme wird für jedes Urteil der Form SxP eine Existenzvoraussetzung für S, P, S' und P' gemacht.[36] Im Vergleich mit

[36] Das Zeichen „$'$“ stehe für die *Termnegation*. Ein Ausdruck der Form „X'“ werde somit als „nicht-X“ gelesen und heiße *negativer Term*.

den anderen hier vorgestellten Syllogistiksystemen trägt dieses also die größte „ontologische Last“ (vgl. Tabelle 10).

		SaP	SeP	SiP	SoP
Strawson	S	+	+	-	-
	P	+	+	-	-
	S'	+	+	-	-
	P'	+	+	-	-
Ockham	S	+	-	+	-
	P	+	-	+	-
	S'	-	-	-	-
	P'	-	-	-	-
traditionell	S	+	+	+	+
	P	+	+	+	+
	S'	-	+	-	-
	P'	-	+	-	+
Menne	S	+	+	+	+
	P	+	+	+	+
	S'	+	+	+	+
	P'	+	+	+	+

Tabelle 3.10: Existenzvoraussetzung verschiedener Syllogistiksysteme

3.4.3 Sprachgebrauch und unmittelbare Schlussformen

Strawson nennt unter seiner dritten Bedingung nur eine begrenzte Anzahl der von der Tradition überlieferten unmittelbaren Schlussformen:

I. Die reine und die unreine Konversion:
(1) $SeP \vdash PeS$
(2) $SiP \vdash PiS$
(3) $SaP \vdash PiS$
(4) $SeP \vdash PoS$

II. Die Obversion:
(5) $SaP \vdash SeP'$
(6) $SeP \vdash SaP'$
(7) $SiP \vdash SoP'$
(8) $SoP \vdash SiP'$

III. Die Kontraposition:
(9) $SaP \vdash P'aS'$

Damit endet die explizite Aufzählung Strawsons. Für die Kontraposition können noch zwei weitere Schlussformen ergänzt werden, die ebenfalls dem Schema $Sx_1P \vdash P'x_2S'$[37] entsprechen:

(10) $SeP \vdash P'oS'$
(11) $SoP \vdash P'oS'$

Die *Inversion* wird von Strawson nur dem Namen nach erwähnt. Aufgrund der bisherigen Systematik dürfte Strawson hierunter Schlüsse der Form $Sx_1P \vdash S'x_2P$[38] verstehen:[39]

(12) $SaP \vdash S'oP$
(13) $SeP \vdash S'iP$

Um die Anerkennung einer Reihe von unmittelbaren Schlussformen gab es in der Geschichte immer wieder Auseinandersetzungen. Am heftigsten umstritten war hierbei die Kontraposition, zu deren Verteidigung sich Melanchthon genötigt sah, auf ihre Verwendung durch Jesus selbst zu verweisen.[40] Die Frage nach der Allgemeingültigkeit bestimmter unmittelbarer Schlussformen ist unter anderem von der Existenzvoraussetzung negativer Terme abhängig. So ist die Kontraposition $SaP \vdash P'aS'$ unter Ockhamscher Interpretation unzulässig, da dort Aussagen der Form SaP auch dann wahr sind, wenn es weder Dinge, die S' sind, noch Dinge, die P' sind, gibt, bei gleichzeitiger Existenzvoraussetzung von Dingen, die S und P sind. Wenn es also ausschließlich Dinge gibt, die S und P sind, dann sind unter dieser Interpretation Aussagen der Form SaP wahr, der Form $P'aS'$ aber falsch (vgl. Zeile 14 in Tabelle 7).[41] Auch unter traditioneller Interpretation sind nach der Kontraposition gebildete Schlüsse nicht korrekt. Die Unzulässigkeit von $SaP \vdash P'aS'$ ist einem bestimmten Alltagssprachgebrauch adäquat, wonach man nicht ohne weiteres bereit ist, von der Binsenweisheit „Alles Menschengemachte ist vergänglich“ auf die Existenz von Unvergänglichem zu schließen. Während unter den Interpretationen von Strawson und Menne alle genannten unmittelbaren Schlussformen allgemeingültig sind, ergibt sich für die Ockhamsche und die traditionelle Interpretation kein einheitliches Bild, wie Tabelle 11 zeigt.[42]

Ein Unterschied zwischen den verschiedenen Syllogistiksystemen, der weniger offensichtlich ist, besteht für das kontradiktorische Verhältnis hinsichtlich der Existenzvoraussetzung. Unter Strawsons Interpretation bedeutet die

[37] Wobei x_1 und x_2 nicht notwendig voneinander verschieden sind.

[38] Auch hier sind x_1 und x_2 nicht notwendig voneinander verschieden.

[39] Für die unmittelbaren Schlussformen gibt es in der Tradition keine einheitlichen Bezeichnungen. Die obige entspricht der von Keynes; vgl. J. N. Keynes, a.a.O., 103–109.

[40] Vgl. Albert Menne: *Kontraposition und Syllogistiksysteme.* In: *Archiv für Geschichte der Philosophie* 72 (1990), S. 15–25; zur Auseinandersetzung um die Kontraposition im Mittelalter s. Terence Parsons: *The Traditional Square of Opposition – a Biography.* In: *Acta Analytica*, 18, 1997: History of Logic and Ethical Issuses, 23–49, S. 34f.

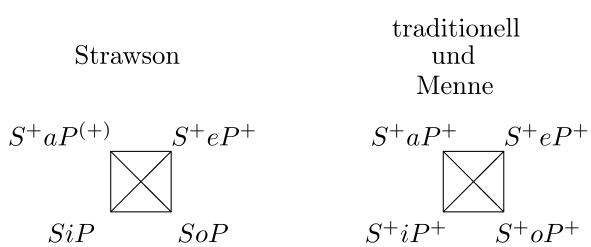
[41] Das Problem negativer Terme läßt sich somit auch als Problem definiter Terme formulieren.

[42] Die allgemeingültigen Formen sind dort mit einem Kreuz gekennzeichnet.

		traditionell	Ockham
Konversion	$SeP \vdash PeS$	x	x
	$SiP \vdash PiS$	x	x
	$SaP \vdash PiS$	x	x
	$SeP \vdash PoS$	x	x
Obversion	$SaP \vdash SeP'$		x
	$SeP \vdash SaP'$	x	
	$SiP \vdash SoP'$		x
	$SoP \vdash SiP'$	x	
Kontra-position	$SaP \vdash P'aS'$		
	$SeP \vdash P'oS'$	x	x
	$SoP \vdash P'oS'$		x
Inver-sion	$SaP \vdash S'oP$		x
	$SeP \vdash S'iP$	x	

Tabelle 3.11: Unmittelbare Schlussformen in verschiedenen Syllogistiksystemen

Kontradiktion einer kategorischen Aussageform zugleich auch die „Negation" ihrer Existenzvoraussetzungen, insofern aus jedem Term X ein Term X^+ (bzw. $X^{(+)}$) wird und vice versa. Unter traditioneller Interpretation und der von Menne ist die Kontradiktion hinsichtlich der Existenzvoraussetzung unsensibel. Es handelt sich also um zwei verschiedene Formen von Kontradiktion.[43]



Die einzelnen Syllogistiksysteme unterscheiden sich auch hinsichtlich des Informationswertes, welchen sie den verschiedenen kategorischen Aussagen zuschreiben. Bestimmt man den Informationswert einer Aussage als den Anteil der durch diese Aussage ausgeschlossenen Möglichkeiten,[44] so ergibt sich für die hier vorgestellten Syllogistiksysteme folgendes Bild:

[43]Unter Ockhamscher Interpretation verhält sich die Existenzvoraussetzung bei Kontradiktion wie bei Strawson, wobei bei ersterer nicht die universellen, sondern die affirmativen Formen Existenz für S und P voraussetzen.

[44]Es handelt sich hierbei um das von Bar-Hillel und Carnap entwickelte semantische Informationsmaß $cont(x)$. Vgl. Yehoshua Bar-Hillel & Rudolf Carnap: *An Outline of a Theory of Semantic Information.* In: *Technical Report No. 247* des Research Laboratory of Electronics am Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 1952; wiederabgedr.

Informationswerte unter Strawsons Interpretation:

$$\begin{array}{ccccccc} SaP & = & SeP & = & 14/16 & = & 0{,}875 \\ SiP & = & SoP & = & 2/16 & = & 0{,}125 \end{array}$$

Informationswerte unter Ockhams Interpretation:

$$\begin{array}{ccccccc} & & SaP & = & 12/16 & = & 0{,}75 \\ SeP & = & SiP & = & 8/16 & = & 0{,}5 \\ & & SoP & = & 4/16 & = & 0{,}25 \end{array}$$

Informationswerte unter traditioneller Interpretation:

$$\begin{array}{ccccc} SeP & = & 8/10 & = & 0{,}8 \\ SaP & = & 6/10 & = & 0{,}6 \\ SoP & = & 4/10 & = & 0{,}4 \\ SiP & = & 2/10 & = & 0{,}2 \end{array}$$

Informationswerte unter Mennes Interpretation:

$$\begin{array}{ccccccc} SaP & = & SeP & = & 5/7 & = & 0{,}71 \\ SiP & = & SoP & = & 2/7 & = & 0{,}29 \end{array}$$

Interessant hierbei ist, daß die einzelnen Syllogistiksysteme den Aussageformen nicht nur verschiedene *absolute* Informationswerte zuordnen, sondern diese auch je nach System *relativ* zueinander abweichen.

3.4.4 Fazit

Seit ihrer ersten Formulierung durch Aristoteles bis in die Gegenwart gab es immer wieder Kontroversen um das richtige System der Syllogistik. Die Disziplin der Syllogistik hat sich durch Normierung und Formalisierung aus der Alltagssprache entwickelt. Das Carnapsche Toleranzprinzip sollte deshalb auch für die verschiedenen Systeme der Syllogistik gelten. D. h. nicht die Anerkennung bestimmter Schlussweisen, die ja ihrerseits schon Resultat einer bestimmten Normierung sind, sollte über die Rechtmäßigkeit eines Syllogistiksystems entscheiden, sondern der mit dieser Normierung intendierte Zweck.

So erfüllt sowohl die Interpretation von Menne als auch die von Strawson die Bedingungen (1)–(3) vollständig, gleichwohl gibt es Gründe, sich gegen ihre Verwendung zu entscheiden. Mennes Interpretation ist beispielsweise ungeeignet, um Sätze mit nicht definiten Termen unter Existenzvoraussetzung, die u. a. in der Theologie vorkommen, auszudrücken.[45] Strawson selbst weist auf intuitive Unzulänglichkeiten seiner Interpretation hin, da bei ihm Aussagen der Form SiP auch dann wahr sind, wenn es keine Dinge gibt, die S sind.

---

in: Yehoshua Bar-Hillel, *Language and Information. Selected Essays on their Theory and Application*, Jerusalem 1964, S. 221–274.

[45] Z. B. „Alles von Gott Erschaffene ist gut". Vgl. Peter Bernhard: *Euler-Diagramme. Zur Morphologie einer Repräsentationsform in der Logik*, Paderborn 2001, S. 136f.

So ist in seiner Interpretation die Aussage „Einige Studenten, die nächstes Jahr ihr Examen machen, werden eine Auszeichnung erhalten“ auch dann wahr, wenn kein Student im nächsten Jahr das Examen besteht.

Auch die hier vorgenommene Festsetzung, nicht jedes System, das eine Interpretation kategorischer Aussagen beinhaltet, als ein System der Syllogistik anzusehen, dient der Schlichtung bisheriger Streitigkeiten. So können auch solche Interpretationen, die kein Syllogistiksystem im hier festgelegten Sinne bilden, eine Rechtfertigung durch den Sprachgebrauch besitzen.

Für die moderne Interpretation sprach sich zum ersten mal Brentano in seiner *Psychologie vom empirischen Standpunkte* aus, indem er kategorische Aussagen in sog. Existentialaussagen übersetzte. Demnach behaupten partikuläre Aussagen, daß es etwas bestimmtes *gibt*, universelle Aussagen hingegen, daß es etwas bestimmtes *nicht gibt*:[46]

Alle Menschen sind sterblich. $\cong$ *Es gibt nicht einen unsterblichen Menschen.*

Kein Stein ist lebendig. $\cong$ *Es gibt nicht einen lebendigen Stein.*

Einige Menschen sind krank. $\cong$ *Es gibt einen kranken Menschen.*

Einige Menschen sind nicht gebildet. $\cong$ *Es gibt einen ungebildeten Menschen.*

Aus wissenschaftstheoretischen Gründen geben auch Cohen und Nagel dieser modernen Interpretation den Vorzug, da sich allein unter dieser Interpretation Gesetzesaussagen wissenschaftlicher Erklärungen formulieren ließen. Als Beispiel führen sie Newtons Trägheitsgesetz an:

> All bodies free of impressed forces persevere in their state of rest or of uniform motion in a straight line forever. Will the reader affirm that this proposition asserts the existence of any body which is not under the influence of an impressed force? We need remind him only of the law of gravitation, according to which *all* bodies attract one another. What Newton's first law does assert is the hypothesis that *if* a body were free from impressed forces, it would persevere in its state of rest or in uniform motion in a straight line forever. [...] Indeed, reflection upon the principles of the sciences makes it quite clear that universal propositions in science always function as *hypotheses*, not as statements of fact asserting the existence of individuals which are instances of it.[47]

Ein Nachteil der modernen Interpretation besteht jedoch darin, daß sich dort Aussagen der Form SaP und SeP nicht konträr zueinander verhalten, so daß z. B. die Aussagen „Alle Einhörner können fliegen“ und „Kein Einhorn kann fliegen“ zugleich wahr sein können.[48] Auch die Unzulässigkeit, von „Alle“

[46] S. Franz Brentano: *Psychologie vom empirischen Standpunkte*, Bd. 1, Leipzig 1874, S. 283.

[47] Morris Raphael Cohen & Ernest Nagel: *An Introduction to Logic and Scientific Method*, New York 1935, S. 42f.

[48] Nämlich genau dann, wenn es keine Einhörner gibt.

auf „Einige“ schließen zu können, widerspricht dem Alltagssprachgebrauch in weiten Teilen.

3.5 Aufgaben

1. Bilden Sie ein logisches Quadrat mit den vier traditionellen Urteilsformen in moderner Interpretation.

2. Geben Sie für CESARE, DISAMIS und CALEMES je ein umgangssprachliches Beispiel sowie eine Ableitung im KNS in der Interpretation von Lewis Carroll. Benutzen Sie für die Darstellung der Schlüsse ausschließlich Existenzquantoren.

3. Bilden Sie mit den Begriffen des Natürlichen und des Vollkommenen verschiedene Urteile in den traditionellen Formen und geben Sie die Existenzvoraussetzungen bei Ockhamscher Interpretation an. Bilden Sie dazu die möglichen Konversionen und Kontrapositionen.

4. Kommentieren Sie nachfolgende Passage aus Aristoteles' *Ersten Analytiken* I 6.

   28a10 *Wenn demselben <Term> der eine <Term> allgemein bejahend, der andere allgemein verneint zukommt, oder beide allgemein bejahend oder verneint, so nenne ich eine solche Figur die dritte. „Mittelterm“ nenne ich in ihr den, von dem die beiden Prädikate ausgesagt werden, „Außenterme“ die Prädikate; „größeren Außenterm“ den, der vom Mittelterm weiter entfernt ist, „kleineren“ den, der näher daran ist. Der Mittelterm wird außerhalb der Außenterme gesetzt und ist seiner Stellung nach der letzte.*

   28a15 *Ein vollkommener Syllogismus kommt nun in dieser Figur nicht zustande, aber ein Syllogismus ist möglich, sowohl, wenn die Prämissen allgemein sind, als auch, wenn das nicht der Fall ist. Für den Fall allgemeiner Prämissen <ergibt sich>, wenn sowohl das P wie das R jedem S zukommt, daß irgendeinem R das P notwendig zukommt. Denn da die bejahende <Prämisse> umkehrbar ist, wird das S irgendeinem R zukommen, so daß, da jedem S das P und irgendeinem R das S, notwendig auch das P irgendeinem R zukommt. Denn es ergibt sich ein Syllogismus aufgrund der ersten Figur.*

4
Weiterführendes

4.1 Normalformen

4.1.1 Konjunktive und disjunktive Normalformen

Eine „konjunktive Normalform“, kurz KNF, ist eine Konjunktion, die nur aus Disjunktionen von Elementarsätzen oder deren Negationen besteht, eine „disjunktive Normalform“, kurz DNF, ist eine Disjunktion, die nur aus Konjunktionen von Elementarsätzen oder deren Negationen besteht. Ein Beispiel für eine DNF ist $(p \wedge r) \vee r \vee (\neg q \wedge p)$. Ein Beispiel für eine KNF ist $(p \vee q) \wedge r \wedge (\neg q \vee p)$. Der Ausdruck $p \wedge \neg q$ ist sowohl eine KNF als auch eine DNF, ebenso der Ausdruck $\neg p \vee q$. Die folgenden Sequenzen beschreiben eine Reihe zulässiger Regeln:

Äquivalenzauflösung (ÄA): $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
$\neg(P \leftrightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q \vee Q \wedge \neg P$

Kontravalenzauflösung (KA): $P \not\leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \to \neg Q) \wedge (\neg P \to Q)$
$\neg(P \not\leftrightarrow Q) \dashv\vdash P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

Subjunktionsauflösung (SA): $P \to Q \dashv\vdash \neg P \vee Q$
$\neg(P \to Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$

Distributionsgesetz (DG): $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Assoziativitätsgesetz (AG): $P \wedge (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \wedge R$
$P \vee (Q \vee R) \dashv\vdash (P \vee Q) \vee R$

Kommutativitätsgesetz (KG): $P \wedge Q \dashv\vdash Q \wedge P$
$P \vee Q \dashv\vdash Q \vee P$

Klammerkonvention (KK): $P \wedge (Q \wedge R) \dashv\vdash P \wedge Q \wedge R$
$P \vee (Q \vee R) \dashv\vdash P \vee Q \vee R$

Idempotenzgesetz (IP): $P \dashv\vdash P \vee P$
$P \dashv\vdash P \wedge P$

Erweiterungssatz (ES): $P \dashv\vdash P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$
$P \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

Damit kann jeder Ausdruck des KNS sowohl in eine DNF als auch in eine KNF übersetzt werden. Für den Ausdruck $(P \to Q) \not\leftrightarrow \neg R$ lässt sich dies über folgende Schritte bewerkstelligen:

(1)	$(P \to Q) \nleftrightarrow \neg R$	
(2)	$[(P \to Q) \to R] \wedge [\neg(P \to Q) \to \neg R]$	KA,¬¬B
(3)	$[\neg(P \to Q) \vee R] \wedge [(P \to Q) \vee \neg R]$	SA,¬¬B
(4)	$[(P \wedge \neg Q) \vee R] \wedge [(\neg P \vee Q) \vee \neg R]$	SA
(5)	$[(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)] \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$	DG
(6)	$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$	KK

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, können in einer Normalform die Konjunktionszeichen weggelassen und Negationen durch Überstreichung gekennzeichnet werden. Der Ausdruck in Zeile (6) lässt sich somit wiedergeben als $(P \vee R)(\bar{Q} \vee R)(\bar{P} \vee Q \vee \bar{R})$.

Auch mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen können Normalformen gebildet werden, da ja jeder Wahrheitswertverlauf anzeigt, was der Fall ist, wenn die zugehörige Aussage wahr bzw. falsch ist. So zeigt die W-Tabelle unten, dass $(P \to Q) \nleftrightarrow \neg R$ bei den Verhältnissen der Zeilen 1, 4, 5 und 7 wahr ist, d. h. wenn P, Q und R wahr sind *oder* wenn P wahr ist, Q und R aber falsch sind *oder* wenn P falsch ist, Q und R aber wahr sind *oder* wenn P und Q falsch sind, R jedoch wahr ist. Daraus ergibt sich die DNF $P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ bzw. $PQR \vee P\bar{Q}\bar{R} \vee \bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R$. Die letzte Spalte der W-Tabelle zeigt auch, dass eine Aussage der Form $(P \to Q) \nleftrightarrow \neg R$ unter den Verhältnissen der Zeilen 2, 3, 6 und 8 falsch ist; ist sie also wahr, gilt *nicht,* dass P und Q wahr sind, R aber falsch, *und nicht,* dass P und R wahr sind, Q aber falsch, *und nicht,* dass allein Q wahr ist, *und nicht,* dass P, Q und R falsch sind; formal dargestellt: $\neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$, woraus sich unter Verwendung von DM die KNF ergibt $(\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R)(\bar{P} \vee Q \vee \bar{R})(P \vee \bar{Q} \vee R)(P \vee Q \vee R)$.

	P	Q	R	$\neg R$	$P \to Q$	$(P \to Q) \nleftrightarrow \neg R$
1	1	1	1	0	1	1
2	1	1	0	1	1	0
3	1	0	1	0	0	0
4	1	0	0	1	0	1
5	0	1	1	0	1	1
6	0	1	0	1	1	0
7	0	0	1	0	1	1
8	0	0	0	1	1	0

Kommt in einer KNF jede Variable in jeder Disjunktion genau einmal vor, so spricht man von einer „kanonischen“ bzw. „vollständigen konjunktiven Normalform“, kurz VKNF. Entsprechendes gilt für eine DNF. Aus Wahrheitswerttabellen lassen sich VKNFs und VDNFs unmittelbar ablesen. Mit Hilfe der oben angeführten Regeln lassen sich vollständige Normalformen aber auch erzeugen, wie das folgende Beispiel zeigt:

(1)	$PR \vee QR$	
(2)	$PRQ \vee PR\bar{Q} \vee QR$	ES
(3)	$PQR \vee P\bar{Q}R \vee QRP \vee QR\bar{P}$	KK,KG,ES
(4)	$PQR \vee P\bar{Q}R \vee PQR \vee \bar{P}QR$	KK,KG
(5)	$PQR \vee P\bar{Q}R \vee \bar{P}QR$	IP

Ein Ausdruck ist *tautologisch*, wenn die entsprechende DNF zwei Disjunktionsglieder der Form A und $\neg A$ enthält, *kontradiktorisch*, wenn die entsprechende KNF zwei Konjunktionsglieder dieser Form enthält. Mit Normalformen lässt sich also ein Entscheidungsverfahren konstruieren. Sind K_1 und K_2 KNFs, so gilt $K_1 \vdash K_2$ genau dann, wenn die Menge der Konjunktionsglieder von K_2 eine Teilmenge der Menge der Konjunktionsglieder von K_1 bildet. Sind D_1 und D_2 DNFs, so gilt $D_1 \vdash D_2$ genau dann, wenn die Menge der Disjunktionsglieder von D_1 eine Teilmenge der Menge der Disjunktionsglieder von D_2 bildet.

4.1.2 Aufgaben

1. Bilden Sie eine VDNF zu (a) $\neg(P \leftrightarrow Q \vee R)$ und zu (b) $\neg P \vee Q$.

2. Bilden Sie eine VKNF zu (a) $A \leftrightarrow B \vee C$ und zu (b) $A \vee \neg B$.

3. Konstruieren Sie die VDNF zu (a) $A \vee BC$ und zu (b) $P \to (Q \to P)$ ohne Verwendung einer Wahrheitstafel. Sind die Ausdrücke formal wahr?

4. Bilden Sie für den Ausdruck $A \wedge \neg B$ die VDNF und die VKNF und geben Sie den Wahrheitswertverlauf dazu an.

4.1.3 Pränexe Normalformen

Eine „pränexe Normalform“, kurz PNF, ist ein Ausdruck der Gestalt $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\phi$, wobei Q_i ein Quantor ($\forall$ oder $\exists$) ist und ϕ ein quantorenfreier prädikatenlogischer Ausdruck. Dabei bezeichnet man den Teil $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$ als „Präfix“, ϕ als „Kern“ bzw. „Matrix“. Beispiele für PNFs sind $\forall x\exists y(Axy)$ und $\exists x\exists y(Ax \to \neg By)$.

Die folgenden Sequenzen beschreiben eine Reihe zulässiger Regeln:

Quantorenlogische Dualität (QD):	$\exists x\neg Ax$	$\dashv\vdash$	$\neg\forall xAx$
	$\forall x\neg Ax$	$\dashv\vdash$	$\neg\exists xAx$
Umbenennung (UB):	$\forall xAx$	$\dashv\vdash$	$\forall yAy$
	$\exists xAx$	$\dashv\vdash$	$\exists yAy$
	Aa	$\dashv\vdash$	Ab

Pränexitätsgesetze (PG):

$$\begin{array}{rcl} Qx(Ax \oplus B) & \dashv\vdash & QxAx \oplus B \\ Qx(B \oplus Ax) & \dashv\vdash & B \oplus QxAx \\ QxQy(Ax \oplus By) & \dashv\vdash & Qx(Ax \oplus QyBy) \\ QxQy(By \oplus Ax) & \dashv\vdash & Qx(QyBy \oplus Ax) \\ \text{mit } Q = \forall \text{ oder } \exists & \text{und} & \oplus = \wedge \text{ oder } \vee \end{array}$$

Man beachte, dass bei Anwendung von PG der ausgeklammerte Quantor stets unmittelbar vor der Klammer zu stehen kommt. Damit ist ausgeschlossen, dass sich bei mehrstelligen Prädikaten die Reihenfolge der Quantoren ändert, also z. B. aus $\forall x \exists y Axy$ der Ausdruck $\exists y \forall x Axy$ wird. Bei UB ist darauf zu achten, dass dafür noch nicht vorkommende Buchstaben verwendet werden. Damit kann nun jeder Ausdruck des KNS in eine PNF übersetzt werden, wobei es meist verschiedene Wege dorthin gibt und somit auch verschiedene Gestalten der erzeugten PNF. Für den Ausdruck $\exists xPxb \wedge Pac \vee \neg\exists xQxc$ lässt sich dies beispielsweise über folgende Schritte bewerkstelligen:

(1)	$\exists xPxb \wedge Pac \vee \neg\exists xQxc$	
(2)	$\exists xPxb \wedge Pac \vee \neg\exists yQyc$	UB
(3)	$\exists x(Pxb \wedge Pac) \vee \forall y\neg Qyc$	PG,QD
(4)	$\exists x[(Pxb \wedge Pac) \vee \forall y\neg Qyc]$	PG
(5)	$\exists x\forall y[(Pxb \wedge Pac) \vee \neg Qyc]$	PG

Denkbar wäre hier auch gewesen, zunächst den Allquantor und dann den Existenzquantor nach links zu verschieben, so dass Zeile (4) $\forall y[\exists x(Pxb \wedge Pac) \vee \neg Qyc]$ und Zeile (5) $\forall y\exists x[(Pxb \wedge Pac) \vee \neg Qyc]$ gelautet hätte.

4.1.4 Aufgaben

1. Zeigen Sie $\exists x\exists y(Mx \wedge My) \dashv\vdash \exists xMx$.

2. Bilden Sie PNFs mit KNF-Kern für (a) $\neg\forall xPxa \leftrightarrow \exists xQxx$ und für (b) $\exists x(Px \vee \forall yZyx) \wedge \exists x(Hx \vee \neg\exists zFzyx)$.

3. Bilden Sie eine PNF mit DNF-Kern für $\forall x(\exists yPxy \to \exists yQay)$.

4. Geben Sie SaP in Ockhamscher Interpretation als PNF mit VDNF-Kern wieder.

5. Stellen Sie den folgenden Satz als PNF dar: „Wenn jeder jedem vertraut, dann vertraut auch Karl jemandem.“

6. Formalisieren Sie die folgenden Sätze möglichst übersichtlich:

   (a) Der Mars hat vier Monde.

   (b) Matthäus ist einer der vier Evangelisten.

7. Formalisieren Sie „Alles hat eine Ursache, nur Gott nicht“.

4.1.5 Skolemsche Normalformen

Eine PNF ist in Skolemform bzw. eine „Skolemsche Normalform“, wenn sie keinen Existenzquantor enthält. Um alle Existenzquantoren aus dem Präfix einer PNF zu beseitigen, d. h. eine „Skolemisierung“ vorzunehmen, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. wenn links vor dem Existenzquantor kein Quantor steht, so ist der Existenzquantor samt Variable im Präfix zu entfernen und im Kern die Variable an allen Stellen durch eine Konstante (mit einem noch nicht verwendeten Buchstaben) zu ersetzen

2. stehen links vor dem Existenzquantor Allquantoren der Gestalt $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y$, dann ist $\exists y$ zu entfernen und y im Kern an allen Stellen durch $f(x_1 \ldots x_n)$ zu ersetzen.

Dabei sind die Existenzquantoren stets von außen nach innen zu beseitigen. So wird $\exists x \forall y \forall z(Axy \vee Bz \wedge Cx)$ aufgrund von (1) zu $\forall y \forall z(Aay \vee Bz \wedge Ca)$ und $\forall x \forall y \exists z \forall w(Ayz \vee \neg Bzw \wedge Cxyw)$ aufgrund von (2) zu $\forall x \forall y \forall w(Ayf(xy) \vee \neg Bf(xy)w \wedge Cxyw)$. Eine Transformation nach (2) lässt sich plausibilsieren, wenn man sich vergegenwärtigt, dass ein Ausdruck der Gestalt $\forall x \exists y Pxy$ bedeutet, dass es für jedes x mindestens ein y gibt, welches Pxy wahr macht: ein Existenzbeispiel von y in Abhängigkeit von x, anders gesagt: y als Funktion von x. Unter diesem Blickwinkel liegt im Fall (1) eine 0-stellige Funktion vor. Schon die Tatsache, dass die entsprechende Transformation einer unberechtigten Existenzbeseitigung entspricht, verdeutlicht, dass durch Skolemisierung erzeugte Ausdrücke nicht immer mit dem Ausgangsausdruck äquivalent sind. Die Anwendung einer Skolemisierung wird mit „Skol“ gekennzeichnet, so dass z. B. folgende Schrittfolge denkbar ist:

(1)	$\exists w \exists y \forall z \exists x \forall u[\neg Pw \vee (\neg Hxy \wedge \neg Fzyu)]$	
(2)	$\forall z \exists x \forall u[\neg Pa \vee (\neg Hxb \wedge \neg Fzbu)]$	Skol
(3)	$\forall z \forall u[\neg Pa \vee (\neg Hf(z)b \wedge \neg Fzbu)]$	Skol

4.1.6 Aufgaben

1. Bilden Sie zwei verschiedene Skolemsche Normalformen für den Ausdruck $\forall x \exists y Axy \to \exists y \forall x Axy$.

2. Bilden Sie zu den Lösungen 1, 2 und 4 von Aufgabenblatt 5 Skolemsche Normalformen.

4.2 Modallogik

Die Modallogik regelt die Verwendungsweise der beiden Satzoperatoren „möglich“ und „notwendig“ (bzw. „es ist möglich/notwendig, dass ...“). Ein Ausdruck der Gestalt „es ist möglich, dass P“ wird dargestellt als $\Diamond P$, ein Ausdruck der Gestalt „es ist notwendig, dass P“ wird dargestellt als $\Box P$; demnach ist „P ist kontingent“ darzustellen als $\Diamond P \wedge \Diamond \neg P$; kontingent heißt also dasjenige, was *in jeder Hinsicht* (d. h. positiv wie negativ) möglich ist. Möglichkeits- und Notwendigkeitsoperator verhalten sich dual zueinander, d. h. es gilt die

$$\begin{array}{llcl}
\text{Modallogische Dualität (MD):} & \Box P & \dashv\vdash & \neg\Diamond\neg P \\
 & \Box\neg P & \dashv\vdash & \neg\Diamond P \\
 & \neg\Box P & \dashv\vdash & \Diamond\neg P \\
 & \neg\Box\neg P & \dashv\vdash & \Diamond P
\end{array}$$

Ebenso gilt, dass (1) $\neg\Diamond P$ nicht gleichbedeutend ist mit $\Diamond\neg P$. So ist die Aussage „Es ist nicht möglich, dass Hegel in Stuttgart geboren ist“ falsch, aber die Aussage „Es ist möglich, dass Hegel nicht in Stuttgart geboren ist“ wahr, und dass (2) der Möglichkeitsoperator und der Notwendigkeitsoperator wechselseitig durcheinander definiert werden können.

Die Modallogik ist nicht wahrheitsfunktional, d. h. ersetzt man in einem modallogischen Ausdruck eine Teilaussage durch eine andere mit gleichem Wahrheitswert, so kann sich der Wahrheitswert der Gesamtaussage ändern. So ist der Satz „Es ist möglich, dass Hegel nicht in Stuttgart geboren ist“ wahr (denn Hegel könnte ja auch woanders geboren sein), wobei er die falsche Teilaussage „Hegel ist nicht in Stuttgart geboren“ enthält. Ersetzt man diese durch die falsche Aussage „Es gibt runde Quadrate“, so erhält man den falschen Satz „Es ist möglich, dass es runde Quadrate gibt“. Die folgenden Sequenzen beschreiben eine Reihe von zulässigen Regeln:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Box-Distributionsgesetz } (\Box DG): & \Box(P \wedge Q) & \dashv\vdash & \Box P \wedge \Box Q \\
 & \Box P \vee \Box Q & \vdash & \Box(P \vee Q) \\
 & \Box(P \rightarrow Q) & \vdash & \Box P \rightarrow \Box Q \\
\text{Rautendistributionsgesetz } (\Diamond DG): & \Diamond(P \vee Q) & \dashv\vdash & \Diamond P \vee \Diamond Q \\
 & \Diamond(P \wedge Q) & \vdash & \Diamond P \wedge \Diamond Q \\
\text{Box-Beseitigung } (\Box B): & \Box P & \vdash & P \\
 & \Box\Box P & \vdash & \Box P \\
 & \Box\Diamond P & \vdash & \Diamond P \\
\text{Rautenbeseitigung } (\Diamond B): & \Diamond\Box P & \vdash & \Box P \\
\text{Box-Einführung } (\Box E): & \Diamond P & \vdash & \Box\Diamond P \\
\text{Rauteneinführung } (\Diamond E): & \Box P & \vdash & \Box\Diamond P \\
 & \Diamond P & \vdash & \Diamond\Diamond P \\
 & P & \vdash & \Diamond P
\end{array}$$

Demnach gilt $\Box P \vdash P \vdash \Diamond P$, was als ontologische Abschwächung interpretiert werden kann. Außerdem zeigt sich: Ist eine Aussage nicht kontingent, dann gilt sie oder ihre Negation mit Notwendigkeit: $\neg(\Diamond P \wedge \Diamond\neg P) \vdash \Box\neg P \vee \Box P$.

Aufgaben

1. Formalisieren Sie:

(a) *Dass die Erde einen Mond hat, ist kontingent.*

(b) *Der Mars muss mindestens zwei Monde haben.*

(c) *Pluto kann unmöglich zwei Monde haben.*

(d) *Blitz und Donner gehören zusammen.*

(e) *Gott und seine Existenz gehören mit Notwendigkeit zusammen.*

(f) *Dass alle Menschen sterblich sind, ist kontingent.*

2. Leiten Sie ab:

   (a) *Dass 1+1=2 nicht notwendig ist, ist unmöglich; will sagen: 1+1=2 gilt notwendig.*

   (b) *Aus dem Umstand, dass es notwendigerweise unmöglich ist, dass 1+1=3, kann gefolgert werden, dass die Möglichkeit von 1+1=3 unmöglich ist.*

   (c) $\Box A \vee \Box B \vdash \Box(\Box A \vee \Box B)$

5
Lösungen

Lösungen zu 1.1.1.4

1. Der Schluss ist formal gültig (und somit auch gültig):

1	(1)	$v \rightarrow b$	A
2	(2)	v	A
1, 2	(3)	b	$\rightarrow$B, 1, 2

„v“ für „Venedig liegt am Meer.“

„b“ für „In Venedig kann man baden.“

2. Der Schluss ist formal gültig.

1	(1)	$f \rightarrow m$	A
2	(2)	$f \wedge w$	A
2	(3)	f	$\wedge$B, 2
1, 2	(4)	m	$\rightarrow$B, 1, 3

„f“ für „Frege schrieb die *Begriffsschrift*.“

„w“ für „Wittgenstein schrieb den *Tractatus*.“

„m“ für „Frege kann als der Begründer der modernen Logik gelten.“

3. Der Schluss ist formal gültig.

Lösungen zu 1.1.1.6

1. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$\neg\neg a$	A
1	(2)	a	$\neg\neg$B, 1

„a“ für „Atome sind teilbar.“

2. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$v \rightarrow (g \wedge \neg g)$	A
1	(2)	$\neg v$	$\neg$E, 1

„v“ für „Das Vorlesungsskript stimmt.“

„g“ für „Das Gute existiert.“

3. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$p \wedge k$	A
2	(2)	$p \rightarrow s$	A
3	(3)	$k \rightarrow \neg s$	A
1	(4)	p	$\wedge$B, 1
1, 2	(5)	s	$\rightarrow$B, 2, 4
1	(6)	k	$\wedge$B, 1
1, 3	(7)	$\neg s$	$\rightarrow$B, 3, 6
1, 2, 3	(8)	$s \wedge \neg s$	$\wedge$E, 5, 7
2, 3	(9)	$(p \wedge k) \rightarrow (s \wedge \neg s)$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 8
2, 3	(10)	$\neg(p \wedge k)$	$\neg$E, 9

„p“ für „Das Weltbild von Ptolomäus ist richtig.“

„k“ für „Das Weltbild von Kopernikus ist richtig.“

„s“ für „Die Sonne dreht sich um die Erde.“

4. Der Schluss von $A \wedge B$ auf $A \rightarrow B$ ist formal gültig:

1	(1)	$A \wedge B$	A
1	(2)	B	$\wedge$B, 1
3	(3)	A	A
1, 3	(4)	$A \wedge B$	$\wedge$E, 3, 2
1, 3	(5)	B	$\wedge$B, 4
1	(6)	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 5

5. Auch dieser Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$A \wedge B$	A
2	(2)	$A \rightarrow \neg B$	A
1	(3)	A	$\wedge$B, 1
1, 2	(4)	$\neg B$	$\rightarrow$B, 2, 3
1	(5)	B	$\wedge$B, 1
1, 2	(6)	$B \wedge \neg B$	$\wedge$E, 5, 4
1	(7)	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \wedge \neg B)$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 6
1	(8)	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	$\neg$E, 7

Lösungen zu 1.1.1.10

1. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$k \rightarrow z$	A
2	(2)	$z \rightarrow k$	A
1, 2	(3)	$k \leftrightarrow z$	$\leftrightarrow$E, 1, 2

„k“ für „Die Verordnung tritt in Kraft.“

„z“ für „Mindestens zwei Drittel haben der Verordnung zugestimmt.“

2. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$k \to \neg a$	A
2	(2)	$\neg k \to a$	A
1, 2	(3)	$k \nleftrightarrow a$	$\nleftrightarrow$E, 1, 2

„k“ für „Die Verordnung tritt in Kraft.“

„a“ für „Mindestens ein Drittel hat die Verordnung abgelehnt.“

3. Der Schluss ist formal nicht gültig. Der Fehler liegt in dem falschen Gebrauch der Kontravalenzbeseitigungsregel in Zeile (3). Korrigiert man diesen, erfährt man freilich nicht mehr, als man bereits schon behauptet hatte:

1	(1)	$r \nleftrightarrow \neg r$	A
2	(2)	r	A
1	(3)	$r \to \neg\neg r$	$\nleftrightarrow$B, 1
1, 2	(4)	$\neg\neg r$	$\to$B, 3, 2
1, 2	(5)	r	$\neg\neg$B, 4

4. Streng genommen handelt es sich um ein Enthymem. Ergänzt man die Aussage „Wenn Ulla krank ist, dann bringt Tina sie nicht mit“, so erhält man einen formal gültigen Schluss:

„u“ für „Tina bringt Ulla mit.“

„c“ für „Tina bringt Claudia mit.“

„k“ für „Ulla ist krank.“

1	(1)	$u \vee c$	A
2	(2)	k	A
3	(3)	$k \to \neg u$	A
2, 3	(4)	$\neg u$	$\to$B, 3, 2
1, 2, 3	(5)	c	$\vee$B, 1, 4

Lösungen zu 1.1.1.12

1. $a \to (b \vee c)$
2. $((a \wedge b) \vee c) \nleftrightarrow d$
3. $(d \nleftrightarrow e) \leftrightarrow \neg f$
4. $a \wedge b \to d$
5. $(a \leftrightarrow b) \nleftrightarrow d \vee \neg a \wedge b$

Lösungen zu 1.1.2.2

1)

1	(1)	$P \rightarrow P$	A
1	(2)	$P \leftrightarrow P$	$\leftrightarrow$E, 1, 1

2)

	(1)	$P \rightarrow P$	SVI
	(2)	$P \leftrightarrow P$	$\leftrightarrow$E, 1, 1

3)

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	$\vee$E, 2
1, 2	(4)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$\wedge$E, 3, 1
1	(5)	$P \rightarrow [\,(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)\,]$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4
1	(6)	$\neg P$	$\neg$E, 5
1	(7)	$P \vee \neg P$	$\vee$E, 6
1	(8)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$\wedge$E, 7, 1
	(9)	$\neg(P \vee \neg P) \rightarrow [\,(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)\,]$	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 8
	(10)	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$E, 9
	(11)	$P \vee \neg P$	$\neg\neg$B, 10

4)

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$\wedge$B, 1
1	(3)	$P \vee Q$	$\vee$E, 2

5)

1	(1)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
1	(2)	$\neg P$	$\wedge$B, 1
1	(3)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee$E, 2

Lösungen zu 1.1.2.4

1. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$k \vee \neg z$	A
2	(2)	z	A
3	(3)	$\neg k$	A
1, 3	(4)	$\neg z$	$\vee$B, 1, 3
1, 2, 3	(5)	$z \wedge \neg z$	$\wedge$E, 2, 4
1, 2	(6)	$\neg k \rightarrow (z \wedge \neg z)$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 5
1, 2	(7)	$\neg\neg k$	$\neg$E, 6
1, 2	(8)	k	$\neg\neg$B, 7

„k“ für „Sie kommen um 18 Uhr.“

„z“ für „Sie haben den Zug erreicht.“

2. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$(f \wedge g) \to \neg b$	A
2	(2)	j	A
3	(3)	$j \to b$	A
2, 3	(4)	b	$\to$B, 3, 2
5	(5)	$f \wedge g$	A
1, 5	(6)	$\neg b$	$\to$B, 1, 5
1, 2, 3, 5	(7)	$b \wedge \neg b$	$\wedge$E, 4, 6
1, 2, 3	(8)	$(f \wedge g) \to (b \wedge \neg b)$	$\to$E, $\underline{5}$, 7
1, 2, 3	(9)	$\neg(f \wedge g)$	$\neg$E, 8

„f“ für „Das Flusswasser ist verseucht.“

„g“ für „Das Grundwasser ist verseucht.“

„j“ für „Der Landstrich ist seit Jahrzehnten bewohnt.“

„b“ für „Der Landstrich ist bewohnbar.“

3. Der Schluss ist formal gültig:

1	(1)	$k \wedge h$	A
2	(2)	$h \to d$	A
3	(3)	$d \to v$	A
1	(4)	h	$\wedge$B, 1
1, 2	(5)	d	$\to$B, 2, 4
1, 2, 3	(6)	v	$\to$B, 3, 5

„k“ für „Kant war deutscher Philosoph.“

„h“ für „Hegel war deutscher Philosoph.“

„d“ für „Hegel schrieb auf deutsch.“

„v“ für „Hegel ist verständlich.“

4. Es wird geschlossen von $D \to (A \wedge B) \wedge \neg C$ und $E \to \neg B \wedge \neg F$ auf $\neg(D \wedge E)$, mit

A = Der Boden ist tief.

B = Der Boden ist sandig.

C = Der Boden ist steinig.

D = Der Boden ist für Karotten geeignet.

E = Der Boden ist für Leinsamen geeignet.

F = Der Boden ist schwer.

1	(1)	$\mathrm{D} \to (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \neg\mathrm{C}$	A
1	(2)	$\mathrm{E} \to \neg\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{F}$	A
3	(3)	$\mathrm{D} \wedge \mathrm{E}$	A
3	(4)	D	$\wedge$B, 3
1, 3	(5)	$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \neg\mathrm{C}$	$\to$B, 1, 4
3	(6)	E	$\wedge$B, 3
2, 3	(7)	$\neg\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{F}$	$\to$B, 2, 6
1, 3	(8)	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	$\wedge$B, 5
1, 3	(9)	B	$\wedge$B, 8
2, 3	(10)	$\neg\mathrm{B}$	$\wedge$B, 7
1, 2, 3	(11)	$\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{B}$	$\wedge$E, 9, 10
1, 2	(12)	$(\mathrm{D} \wedge \mathrm{E}) \to (\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{B})$	$\to$E, $\underline{3}$, 11
1, 2	(12)	$\neg(\mathrm{D} \wedge \mathrm{E})$	$\neg$E, 12

5. Nietzsche schließt von $\mathrm{a} \to \neg\mathrm{b}$ und $\neg\mathrm{b} \to \neg\mathrm{a}$ auf $\neg$a, was korrekt ist, wie die folgende Ableitung zeigt:

1	(1)	$\mathrm{a} \to \neg\mathrm{b}$	A
2	(2)	$\neg\mathrm{b} \to \neg\mathrm{a}$	A
3	(3)	a	A
1,3	(4)	$\neg$b	$\to$B,1,3
1, 2, 3	(5)	$\neg$a	$\to$B, 2, 4
1, 2, 3	(6)	$\mathrm{a} \wedge \neg\mathrm{a}$	$\wedge$E, 3, 5
1, 2	(7)	$\mathrm{a} \to (\mathrm{a} \wedge \neg\mathrm{a})$	$\to$E, $\underline{3}$, 6
1, 2	(8)	$\neg$a	$\neg$E, 7

Lösungen zu 1.1.2.6

1. (a) Kettenschluss (KS): $P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$Q \to R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	$\to B, 1, 3$
1,2,3	(5)	R	$\to B, 2, 4$
1,2	(6)	$P \to R$	$\to E, \underline{3}, 5$

(b) Modus tollens (MT): $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	$\to B, 1, 3$
1,2,3	(5)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 4, 2$
1,2	(6)	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{3}, 5$
1,2	(7)	$\neg P$	$\neg E, 6$

(c) Disjunktiver Syllogismus (DS): 1. $P \not\leftrightarrow Q,\ P \vdash \neg Q$

1	(1)	$P \not\leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to \neg Q$	$\not\leftrightarrow B, 1$
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$\neg Q$	$\to B, 2, 3$

(d) Disjunktiver Syllogismus (DS): 2. $P \not\leftrightarrow Q,\ Q \vdash \neg P$

1	(1)	$P \not\leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to \neg Q$	$\not\leftrightarrow B, 1$
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$\neg Q$	$\to B, 2, 3$
5	(5)	Q	A
1,3,5	(6)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 5, 4$
1,5	(7)	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{3}, 6$
1,5	(8)	$\neg P$	$\neg E, 7$
1	(9)	$Q \to \neg P$	$\to E, \underline{5}, 8$
1,5	(10)	$\neg P$	$\to B, 9, 5$

(e) Kontraposition (KP): $P \to Q \dashv\vdash \neg Q \to \neg P$

I.) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	Q	$\to B, 1, 2$
4	(4)	$\neg Q$	A
1,2,4	(5)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 3, 4$
1,4	(6)	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{2}, 5$
1,4	(7)	$\neg P$	$\neg E, 6$
1	(8)	$\neg Q \to \neg P$	$\to E, \underline{4}, 7$

II.) $\neg Q \to \neg P \vdash P \to Q$

1	(1)	$\neg Q \to \neg P$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
1,2	(3)	$\neg P$	$\to B, 1, 2$
4	(4)	P	A
1,2,4	(5)	$P \wedge \neg P$	$\wedge E, 4, 3$
1,4	(6)	$\neg Q \to P \wedge \neg P$	$\to E, \underline{2}, 5$
1,4	(7)	$\neg\neg Q$	$\neg E, 6$
1,4	(8)	Q	$\neg\neg B, 7$
1	(9)	$P \to Q$	$\to E, \underline{4}, 8$

(f) Konstruktives Dilemma (KD): $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \vdash R$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$P \to R$	A
3	(3)	$Q \to R$	A
4	(4)	$\neg R$	A
3,4	(5)	$\neg Q$	MT, 3, 4
1,3,4	(6)	P	$\vee B$, 1, 5
1,2,3,4	(7)	R	$\to B, 2, 6$
1,2,3,4	(8)	$R \wedge \neg R$	$\wedge E, 7, 4$
1,2,3	(9)	$\neg R \to (R \wedge \neg R)$	$\to E, \underline{4}, 8$
1,2,3	(10)	$\neg\neg R$	$\neg E$, 9
1,2,3	(11)	R	$\neg\neg B, 10$

(g) De Morgansche Regeln (DM): I. $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$

I. a) $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee E, 3$
2,3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\wedge E, 2, 4$
2	(6)	$\neg P \to (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\to E, \underline{3}, 5$
2	(7)	$\neg\neg P$	$\neg E, 6$
2	(8)	P	$\neg\neg B, 7$
9	(9)	$\neg Q$	A
9	(10)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee E, 9$
2,9	(11)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\wedge E, 10, 2$
2	(12)	$\neg Q \to (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\to E, \underline{9}, 11$
2	(13)	$\neg\neg Q$	$\neg E, 12$
2	(14)	Q	$\neg\neg B, 13$
2	(15)	$P \wedge Q$	$\wedge E, 8, 14$
1,2	(16)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$\wedge E, 15, 1$
1	(17)	$\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$\to E, \underline{2}, 16$
1	(18)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\neg E, 17$
1	(19)	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg\neg B, 18$

I. b) $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

1	(1)	$\neg P \vee \neg Q$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	$\wedge B, 2$
2	(4)	$\neg\neg P$	$SP, 3$
1,2	(5)	$\neg Q$	$\vee B, 1, 4$
2	(6)	Q	$\wedge B, 2$
1,2	(7)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 6, 5$
1	(8)	$P \wedge Q \to Q \wedge \neg Q$	$\to E, \underline{2}, 7$
1	(9)	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg E, 8$

(h) De Morgansche Regeln (DM): II. $\neg P \wedge \neg Q \dashv\vdash \neg(P \vee Q)$

II. a) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$

1	(1)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A
1	(3)	$\neg P$	$\wedge B, 1$
1,2	(4)	Q	$\vee B, 2, 3$
1	(5)	$\neg Q$	$\wedge B, 1$
1,2	(6)	$Q \wedge \neg Q$	$\wedge E, 4, 5$
1	(7)	$P \vee Q \rightarrow Q \wedge \neg Q$	$\rightarrow E, \underline{2}, 6$
1	(8)	$\neg(P \vee Q)$	$\neg E, 7$

II. b) $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	A
2	(3)	$\neg\neg P \vee \neg\neg Q$	$DM, 2$
4	(4)	$\neg P$	A
4	(5)	$\neg\neg\neg P$	$SP, 4$
2,4	(6)	$\neg\neg Q$	$\vee B, 3, 5$
2,4	(7)	Q	$\neg\neg B, 6$
2,4	(8)	$P \vee Q$	$\vee E, 7$
1,2,4	(9)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\wedge E, 8, 1$
1,2	(10)	$\neg P \rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\rightarrow E, \underline{4}, 9$
1,2	(11)	$\neg\neg P$	$\neg E, 10$
1,2	(12)	P	$\neg\neg B, 11$
1,2	(13)	$P \vee Q$	$\vee E, 12$
1,2	(14)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\wedge E, 13, 1$
1	(15)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$\rightarrow E, \underline{2}, 14$
1	(16)	$\neg\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$\neg E, 15$
1	(17)	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg\neg B, 16$

2. Der Schluss s ∨ a, a → v, g ∧ ¬v ⊢ s ist formal gültig:

„s“ für „Der Beweis ist sophistisch.“

„a“ für „Achilles holt die Schildkröte ein.“

„v“ für „Die Logik versagt.“

„g“ für „Die Mathematiker haben alles geprüft.“

1	(1)	s ∨ a	A
2	(2)	a → v	A
3	(3)	g ∧ ¬v	A
4	(4)	a	A
2, 4	(5)	v	→B, 2, 4
3	(6)	¬v	∧B, 3
2, 3, 4	(7)	v ∧ ¬v	∧E, 5, 6
2, 3	(8)	a → (v ∧ ¬v)	→E, $\underline{4}$, 7
2, 3	(9)	¬a	¬E, 8
1, 2, 3	(10)	s	∨B, 1, 9

3. (a) Paulus ist der Überzeugung: Wenn es keine Auferstehung gibt, dann ist der Glaube leer. Wenn aber der Glaube nicht leer ist, dann gibt es eine Auferstehung der Toten:

1	(1)	$\neg A \to \neg C$	A
2	(2)	$\neg C \to P \wedge G$	A
1,2	(3)	$\neg A \to P \wedge G$	$KS, 1, 2$
4	(4)	$\neg A$	A
1,2,4	(5)	$P \wedge G$	$\to B, 3, 4$
1,2,4	(6)	G	$\wedge B, 5$
1,2	(7)	$\neg A \to G$	$\to E, \underline{4}, 6$
8	(8)	$\neg G$	A
1,2,8	(9)	$\neg\neg A$	$MT, 7, 8$
1,2,8	(10)	A	$\neg\neg B, 9$
1,2	(11)	$\neg G \to A$	$\to E, \underline{8}, 10$
1,2	(12)	$(\neg A \to G) \wedge (\neg G \to A)$	$\wedge E, 7, 11$

„A“ für „Es gibt eine Auferstehung der Toten.“

„C“ für „Christus ist auferweckt worden.“

„P“ für „Die Predigt ist leer.“

„G“ für „Der Glaube ist leer.“

(b) Die Auferstehung der Toten ist eine notwendige Bedingung für die Auferstehung Christi, denn es gilt $C \to A$:

1	(1)	$\neg A \to \neg C$	A
1	(2)	$C \to A$	$KP, 1$

(c) Hinsichtlich der Leere des Glaubens folgt nichts, es folgt jedoch, dass es eine Auferstehung der Toten gibt:

1	(1)	$\neg A \to \neg C$	A
2	(2)	$\neg C \to P \wedge G$	A
3	(3)	C	A
3	(4)	$\neg\neg C$	$SP, 3$
1,3	(5)	$\neg\neg A$	$MT, 1, 4$
1,3	(6)	A	$\neg\neg B, 5$

Lösungen zu 1.2.2

1. KS als Aussageform: $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$

P	Q	R	(1) $P \to Q$	(2) $Q \to R$	$1 \wedge 2$	(3) $P \to R$	$(1 \wedge 2) \to 3$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

DM als Aussageform u. a.: $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. (a) $(P \wedge Q) \to Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

(b) $(P \to P) \to (P \leftrightarrow P)$

P	$P \to P$	$P \leftrightarrow P$	$(P \to P) \to (P \leftrightarrow P)$
1	1	1	1
0	1	1	1

(c) $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	1 $\neg P \vee \neg Q$	2 $P \to \neg Q$	$1 \leftrightarrow 2$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

(d) $A \wedge B \to \neg(A \to \neg B)$

A	B	A ∧ B	¬B	1 A → ¬B	2 ¬(A → ¬B)	1 → 2
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

3. (a) Dass der Satz formal wahr ist, bedeutet vor dem Hintergrund der Beziehung zwischen „→" und „⊢", dass zwischen zwei Aussagen stets ein Ableitungsverhältnis besteht, dass also von allen A und B gilt: A⊢B oder B⊢A.

A	B	A → B	B → A	(A → B) ∨ (B → A)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

(b) Die formale Wahrheit dieses Ausdrucks bedeutet: „Wenn A,B ⊢ C, dann A ⊢ C oder B ⊢ C"; in Worten: Wenn C aus A und B ableitbar ist, dann ist es aus A oder aus B (oder aus beidem) ableitbar.

A	B	C	A ∧ B	(1) A ∧ B → C	(2) A → C	(3) B → C	(4) 2 ∨ 3	1 → 4
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

4. Es empfiehlt sich die Formalisierung: „e" für „Es gibt eine Form von Erlösung.", „s" für „Es gibt eine Form von Sünde." und „g" für „Es gibt einen christlichen Gott." Somit steht folgende Schlussform zur Debatte, deren Falschheit aus der entsprechenden Wahrheitswerttabelle ersichtlich ist: $(e \leftrightarrow s) \vdash (e \leftrightarrow g) \wedge (g \leftrightarrow s)$. Bemerkenswert ist, dass die Aussage dann wahr ist, wenn es keine Erlösung gibt (also in den Zeilen mit $e = 0$), aber auch dann, wenn es eine Form von Erlösung, Sünde und einen christlichen Gott gibt:

e	s	g	(1) $e \leftrightarrow s$	(2) $e \leftrightarrow g$	(3) $g \leftrightarrow s$	$2 \wedge 3$	$1 \rightarrow (2 \wedge 3)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

5. Offensichtlich formalisiert Gallop wie folgt:

„P“ für „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt nicht.“

„Q“ für „Wir werden mit dem pränatalen Wissen geboren.“

„R“ für „Wir erlangen via Sinneserfahrung das pränatale Wissen wieder.“

„S“ für „Lernen ist eine Form von Wiedererinnerung.“

Differenzierter wäre gewesen, „P“ mit „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt“ zu formalisieren und dann (1) $\neg \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ und $(2*) \neg \mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{S}$ zu verwenden.

Bezüglich des Formalen behauptet Gallop, dass für $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$, $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S}$, $\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{R} \vdash \mathrm{Q} \nleftrightarrow \mathrm{S}$ eine Ableitung existiert. Das würde bedeuten, dass die Aussage $[(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{S})] \wedge (\mathrm{P} \nleftrightarrow \mathrm{R}) \rightarrow (\mathrm{Q} \nleftrightarrow \mathrm{S})$ formal wahr ist. Die nachfolgende Wahrheitswerttabelle zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist:

P	Q	R	S	(1) $P \rightarrow Q$	(2) $R \rightarrow S$	(3) $P \nleftrightarrow R$	(4) $1 \wedge 2$	(5) $3 \wedge 4$	(6) $Q \nleftrightarrow S$	$5 \rightarrow 6$
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Wenn keine Ableitung für $P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \nleftrightarrow R \vdash Q \nleftrightarrow S$ existiert, dann freilich erst recht keine für $P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vdash Q \nleftrightarrow S$. Die Unableitbarkeit folgt aus den Zeilen 3, 9 und 11. Man könnte nun fragen, ob diese Zeilen überhaupt möglich sind in dem Sinne, dass man P (= „Wir vergessen das pränatale Wissen bei der Geburt nicht") als identisch mit $\neg$Q (mit Q = „Wir werden mit dem pränatalen Wissen geboren") auffassen könnte.

6. Für den genannten Beweis liegen als Prämissen nahe: (1) $(1 \wedge 2) \rightarrow (3 \wedge 4)$ und (2) $\neg(1 \wedge 2)$. Die Konklusion könnte dann $\neg(3 \wedge 4)$ lauten. Demnach würde es sich um den Fehlschluss „Verneinung des Antecedens" handeln, dessen Ungültigkeit leicht gezeigt werden kann (hier „(1∧2)" mit A und „(3∧4)" mit B abgekürzt):

A	B	$\neg$A	$\neg$B	1 $A \rightarrow B$	2 $1 \wedge \neg A$	$2 \rightarrow \neg B$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

7. (a) Vorausgesetzt, man formalisiert „A ist absurd" mit $\neg$A, so entspricht das Zitat der Formel $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$, deren formale Wahrheit sich mit KNS und Wahrheitstafel leicht zeigen lässt:

1	(1)	$\neg\neg\neg$A	A
1	(2)	$\neg$A	$\neg\neg$B, 1
	(3)	$\neg\neg\neg$A $\rightarrow \neg$A	$\rightarrow$E, $\underline{1}$, 2
4	(4)	$\neg$A	A
4	(5)	$\neg\neg\neg$A	SP, 4
	(6)	$\neg$A $\rightarrow \neg\neg\neg$A	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 5
	(7)	$\neg\neg\neg$A $\leftrightarrow \neg$A	$\leftrightarrow$E, 3, 6

A	$\neg$A	$\neg\neg$A	$\neg\neg\neg$A	$\neg\neg\neg$A $\leftrightarrow \neg$A
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1

(b) Hier sind verschiedene Antworten denkbar:

Variante I: Der Ausdruck $P \rightarrow P$, der, wie in Zeile (2) gezeigt, einer (formalen) Wahrheit entspricht, kann abgeleitet werden aus Beliebigem, wie Zeile (5) zeigt:

1	(1)	P	A
	(2)	$P \rightarrow P$	$\rightarrow$E,$\underline{1}$,1
3	(3)	B	A
3	(4)	$B \wedge (P \rightarrow P)$	$\wedge$E,3,2
3	(5)	$P \rightarrow P$	$\wedge$B,4

Variante II: Wie die Ableitung zeigt, kann B für Beliebiges und in Zeile (1) jedes Theorem (was einer formal wahren Aussage entspricht) stehen – jede nicht schon als Theorem nachgewiesene formal wahre Aussage könnte freilich voraussetzungsfrei hergeleitet werden und via HA in Abhängikeit zu Beliebigem gesetzt werden:

(1)	$P \vee \neg P$	SVD
(2)	$B \rightarrow (P \vee \neg P)$	HA,1

Variante III: Wie die Wahrheitstabelle zeigt, ist $P \rightarrow P$ etwas Wahres, d. h. ein (formal) wahrer Ausdruck. Ebenfalls (formal) wahr ist $B \rightarrow (P \rightarrow P)$ für beliebige B, so dass gilt: $B \vdash P \rightarrow P$, was heißt, dass der wahre Ausdruck $P \rightarrow P$ aus jedem beliebigem Ausdruck folgt. Ebenso ersichtlich ist, dass dieser Zusammenhang für jede formal wahre Aussage bestehen muss.

B	P	$P \rightarrow P$	$B \rightarrow (P \rightarrow P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Variante IV: Den Zeilen 1 und 2 kann man entnehmen: Wenn P wahr ist, dann folgt es aus Beliebigem (d. h. sowohl aus Wahrem als auch aus Falschem), denn $B \vdash P$ entspricht $B \rightarrow P$.

P	B	$B \to P$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

(c) Auch hier sind – analog zur vorhergehenden Aufgabe – verschiedene Varianten denkbar. So kann die Regel z. B. interpretiert werden als $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}$, dessen Korrektheit sich mit KNS und Wahrheitstafel ohne weiteres zeigen lässt:

1	(1)	$\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}$	A
1	(2)	P	$\wedge$B, 1
1	(3)	$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$	$\vee$E, 2
1	(4)	$\neg$P	$\wedge$B, 1
1	(5)	Q	$\vee$B, 3, 4

P	Q	$\neg$P	$\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}$	$(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}) \to \mathrm{Q}$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Lösungen zu 2.2

1. (a) $\exists x\,(Bx \wedge Rx) \wedge \exists y\,(By \wedge Gy) \wedge \forall z\,(Bz \to Wz)$[1]
   (b) $\exists xBx \to \exists xWx$
   (c) $\forall x\,(Rx \to SWx)$[2] $\wedge\ \forall x\,(Sx \to Wx)$
   (d) $\forall x\,(Rx \to Bx) \wedge \exists x\,(Sx \wedge Wx)$
   (e) Es gibt sowohl Schönes als auch Hässliches.
   (f) Wenn alles durchschaubar ist, dann ist Philosophie überflüssig.

2. (a) 1 (2) $Aa \to Ba$ $\quad\forall$B, 1
   (b) (2) $\exists x\,(Px \to Px)$ $\quad\exists$E, 1
   (c) 1 (2) $\exists xPx$ $\quad\exists$E, 1
   (d) 1 (2) $Ap \vee Bp$ $\quad\forall$B, 1

[1]Die Variablen x, y und z stehen nicht notwendig für dieselben Gegenstände; der Zusammenhang wird durch das Prädikat B gestiftet! Da die Gegenstandsvariablen in verschiedenen Aussagen stehen, besteht in formaler Hinsicht keine Kollisionsgefahr, so dass man auch hätte Formalisieren können: $\exists x\,(Bx \wedge Rx) \wedge \exists x\,(Bx \wedge Gx) \wedge \forall x\,(Bx \to Wx)$.

[2]In der Wahl der Abkürzungen ist man frei. Nichts spricht dagegen, für ein Prädikat zwei Großbuchstaben zu verwenden.

(e) Hier kann ∀B nicht unmittelbar angewendet werden:

1	(2)	$\forall x\,(Ax \wedge Bx)$	$\wedge$B, 1
1	(3)	$Aa \wedge Ba$	∀B, 2
1	(4)	$\forall xCx$	$\wedge$B, 1
1	(5)	Ca	∀B, 4
1	(6)	$\exists x\,(Ax \wedge Bx)$	∃E, 3
1	(7)	$\exists xCx$	∃E, 5

(f) Auch hier kann nicht gleich losgelegt werden:

1	(2)	$Da \rightarrow \forall x\,Bx$	$\wedge$B, 1
1	(3)	Da	$\wedge$B, 1
1	(4)	$\forall xBx$	$\rightarrow$B, 2, 3
1	(5)	Ba	∀B, 4
1	(6)	$Da \wedge Ba$	$\wedge$E, 3, 5
1	(7)	$\exists x\,(Dx \wedge Bx)$	∃E, 6
1	(8)	$Za \rightarrow Ba$	HA, 5
1	(9)	$\exists x\,(Zx \rightarrow Bx)$	∃E, 8

3. Die Sequenz lautet: $\forall x(Px \rightarrow \neg Ax), Ph \wedge Am \vdash \exists xPx \wedge \exists x \neg Px$, mit „Px“ für „x ist Philosoph“, „Ax“ für „x amüsiert sich in Discos“, „h“ für „Hans“ und „m“ für „Martin“:

1	(1)	$\forall x(Px \rightarrow \neg Ax)$	A
2	(2)	$Ph \wedge Am$	A
1	(3)	$Pm \rightarrow \neg Am$	∀B,1
2	(4)	Ph	∧B,2
2	(5)	$\exists xPx$	∃E,4
2	(6)	Am	∧B,2
2	(7)	$\neg\neg Am$	SP,6
1,2	(8)	$\neg Pm$	MT,3,7
1,2	(9)	$\exists x \neg Px$	∃E, 8
1,2	(10)	$\exists xPx \wedge \exists x \neg Px$	∧E,5,9

4. Wie der Ableitung zu entnehmen ist, handelt es sich bei dem Ausdruck um ein Theorem des KNS. Somit könnte man sagen, dass damit logisch bewiesen ist, dass es etwas gibt (das Universum also nicht leer ist). Etwas genauer müsste man sagen, dass der KNS voraussetzt, dass beim Schlussfolgern von etwas geredet wird (also die verwendeten Prädikate oder deren Negation etwas bezeichnen).

(1)	$An \vee \neg An$	A
(2)	$\exists x(Ax \vee \neg Ax)$	∃E,1

Lösungen zu 2.4

1. (a) Pa
   (b) $\exists x\,(Gx \wedge Px)$
   (c) $\exists x\,(Gx \wedge Px)$
   (d) $\neg\exists xVx$, mit „Vx“ = „x ist vorhanden“
   (e) $\forall xAx$, mit „Ax“ = „x ist anwesend“ oder $\neg\exists x\,(Ex \wedge \neg Ax)$, zusätzlich mit „Ex“ = „x wird erwartet“
   (f) $\exists x\,(GLx \wedge \neg GOx)$ bzw. $\neg\forall x\,(GLx \rightarrow GOx)$
   (g) $\forall x\,(Vx \rightarrow Lx)$

2. (a) $\forall x\,(Vx \rightarrow Fx),\ Vc \vdash Fc$:

1	(1)	$\forall x\,(Vx \rightarrow Fx)$	A
2	(2)	Vc	A
1	(3)	$Vc \rightarrow Fc$	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	Fc	$\rightarrow$B, 3, 2

   (b) $Vc,\ Lc \vdash \exists x\,(Vx \wedge Lx)$:

1	(1)	Vc	A
2	(2)	Lc	A
1, 2	(3)	$Vc \wedge Lc$	$\wedge$E, 1, 2
1, 2	(4)	$\exists x\,(Vx \wedge Lx)$	$\exists$E, 3

   (c) $\forall x\,(Sx \rightarrow Fx),\ \neg Fr \vdash \neg Sr$, mit „Sx“ = „x ist Scholastiker“, „Fx“ = „x ist Frühaufsteher“, „r“ = „Ramus“:

1	(1)	$\forall x\,(Sx \rightarrow Fx)$	A
2	(2)	$\neg Fr$	A
1	(3)	$Sr \rightarrow Fr$	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	$\neg Sr$	MT, 3, 2

   (d) $\forall x\,(Px \rightarrow Kx),\ Ga \wedge Pa \vdash \exists x\,(Gx \wedge Kx)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \rightarrow Kx)$	A
2	(2)	$Ga \wedge Pa$	A
1	(3)	$Pa \rightarrow Ka$	$\forall$B, 1
2	(4)	Pa	$\wedge$B, 2
1, 2	(5)	Ka	$\rightarrow$B, 3, 4
2	(6)	Ga	$\wedge$B, 2
1, 2	(7)	$Ga \wedge Ka$	$\wedge$E, 6, 5
1, 2	(8)	$\exists x\,(Gx \wedge Kx)$	$\exists$E, 7

(e) $\forall x\,(Px \to \neg Ax),\ \exists x\,(Px \wedge Lx) \vdash \exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \to \neg Ax)$	A
2	(2)	$\exists x\,(Px \wedge Lx)$	A
1	(3)	$Pa \to \neg Aa$	$\forall$B, 1
4	(4)	$Pa \wedge La$	A
4	(5)	Pa	$\wedge$B, 4
1, 4	(6)	$\neg Aa$	$\to$B, 3, 5
4	(7)	La	$\wedge$B, 4
1, 4	(8)	$La \wedge \neg Aa$	$\wedge$E, 7, 6
1, 4	(9)	$\exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\exists$E, 8
1	(10)	$Pa \wedge La \to \exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\to$E, $\underline{4}$, 9
1, 2	(11)	$\exists x\,(Lx \wedge \neg Ax)$	$\exists$B, 2, 10

(f) $\forall x\,(Px \to Sx), \forall x\,(Wx \to \neg Px) \vdash \forall x\,[Px \to (Sx \wedge \neg Wx)]$:

1	(1)	$\forall x\,(Px \to Sx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Wx \to \neg Px)$	A
1	(3)	$Pa \to Sa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Wa \to \neg Pa$	$\forall$B, 2
5	(5)	Pa	A
1, 5	(6)	Sa	$\to$B, 3, 5
5	(7)	$\neg\neg Pa$	SP, 5
2, 5	(8)	$\neg Wa$	MT, 4, 7
1, 2, 5	(9)	$Sa \wedge \neg Wa$	$\wedge$E, 6, 8
1, 2	(10)	$Pa \to Sa \wedge \neg Wa$	$\to$E, $\underline{5}$, 9
1, 2	(11)	$\forall x\,[Px \to (Sx \wedge \neg Wx)]$	$\forall$E, 10

(g) $\forall x\,(SUx \to \neg SWx),\ \forall x\,(STx \to SUx)\ \vdash\ \forall x\,(SWx \to \neg STx)$, mit „SUx“ = „x ist ein Sumpfvogel“, „SWx“ = „x ist ein Schwimmvogel“, „STx“ = „x ist ein Storch“:

1	(1)	$\forall x\,(SUx \to \neg SWx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(STx \to SUx)$	A
1	(3)	$SUa \to \neg SWa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$STa \to SUa$	$\forall$B, 2
1, 2	(5)	$STa \to \neg SWa$	KS, 4, 3
1, 2	(6)	$\neg\neg SWa \to \neg STa$	KP, 5
7	(7)	SWa	A
7	(8)	$\neg\neg SWa$	SP, 7
1, 2, 7	(9)	$\neg STa$	$\to$B, 6, 8
1, 2	(10)	$SWa \to \neg STa$	$\to$E, $\underline{7}$, 9
1, 2	(11)	$\forall x\,(SWx \to \neg STx)$	$\forall$E, 10

(h) $\exists xAx \rightarrow \forall x\,(Dx \wedge \neg Bx),\ \forall xBx \rightarrow \neg\exists xDx \vdash \exists x\,(Ax \rightarrow \neg\forall xBx)$:

1	(1)	$\exists xAx \rightarrow \forall x\,(Dx \wedge \neg Bx)$	A
2	(2)	$\forall xBx \rightarrow \neg\exists xDx$	A
3	(3)	Aa	A
3	(4)	$\exists xAx$	$\exists$E, 3
1, 3	(5)	$\forall x\,(Dx \wedge \neg Bx)$	$\rightarrow$B, 1, 4
1, 3	(6)	$Da \wedge \neg Ba$	$\forall$B, 5
1, 3	(7)	Da	$\wedge$B, 6
1, 3	(8)	$\exists xDx$	$\exists$E, 7
1, 2, 3	(9)	$\neg\forall xBx$	MT, 2, 8
1, 2	(10)	$Aa \rightarrow \neg\forall xBx$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 9
1, 2	(11)	$\exists x\,(Ax \rightarrow \neg\forall xBx)$	$\exists$E, 10

(i) $\exists x(Ax \rightarrow Bx) \vdash \forall xAx \rightarrow \exists xBx$:

1	(1)	$\exists x(Ax \rightarrow Bx)$	A
2	(2)	$Aa \rightarrow Ba$	A
3	(3)	$\forall xAx$	A
3	(4)	Aa	$\forall$B, 3
2, 3	(5)	Ba	$\rightarrow$B, 2, 4
2, 3	(6)	$\exists xBx$	$\exists$E, 5
2	(7)	$\forall xAx \rightarrow \exists xBx$	$\rightarrow$E, $\underline{3}$, 6
	(8)	$(Aa \rightarrow Ba) \rightarrow (\forall xAx \rightarrow \exists xBx)$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 7
1	(9)	$\forall xAx \rightarrow \exists xBx$	$\exists$B, 1, 8

(j) $\forall x(Cx \rightarrow Bx) \vdash \forall x(\neg Cx \rightarrow \neg Bx)$

Bx = x ist Bayer (i. S. v. „hat seinen Wohnsitz in Bayern“)

Cx = x wählt CSU

1	(1)	$\forall x(Cx \rightarrow Bx)$	A
1	(2)	$Ca \rightarrow Ba$	$\forall$B, 1
3	(3)	$\neg Ba$	A
1, 3	(4)	$\neg Ca$	MT, 2, 3
1	(5)	$\neg Ca \rightarrow \neg Ba$	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 3
1	(6)	$\forall x(\neg Cx \rightarrow \neg Bx)$	$\forall$E, 5

Die Formalisierung der Prämisse ist adäquat; sie darf freilich nicht lauten $\forall x(Bx \rightarrow Cx)$! Wäre außerdem Zeile (5) korrekt, dann wäre es auch die Ableitung. Oder hätte man den Becksteinschen Schluss formalisieren sollen mit $\forall x(Cx \leftrightarrow Bx) \vdash \forall x(\neg Cx \leftrightarrow \neg Bx)$?

(k) $\forall x(Lx \rightarrow Wx),\ \exists x\neg Wx \vdash \exists x\neg Lx$

Lx = x hat ein Lehrbuch zur Hand

Wx = x bringt es weit

1	(1)	$\forall \mathrm{x}(\mathrm{Lx} \rightarrow \mathrm{Wx})$	A
2	(2)	$\exists \mathrm{x} \neg \mathrm{Wx}$	A
1	(3)	$\mathrm{La} \rightarrow \mathrm{Wa}$	$\forall$B, 1
4	(4)	$\neg \mathrm{Wa}$	A
1, 4	(5)	$\neg \mathrm{La}$	MT, 3, 4
1, 4	(6)	$\exists \mathrm{x} \neg \mathrm{Lx}$	$\exists$E, 5
1	(7)	$\neg \mathrm{Wa} \rightarrow \exists \mathrm{x} \neg \mathrm{Lx}$	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 6
1, 2	(8)	$\exists \mathrm{x} \neg \mathrm{Lx}$	$\exists$B, 2, 7

(l) $\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)], \exists x \neg Px \vdash \exists x \neg Rx$

1	(1)	$\forall x[\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Rx)]$	A
2	(2)	$\exists x \neg Px$	A
1	(3)	$\neg Pa \rightarrow (Qa \wedge \neg Ra)$	$\forall B, 1$
4	(4)	$\neg Pa$	A
1,4	(5)	$Qa \wedge \neg Ra$	$\rightarrow B, 3, 4$
1,4	(6)	$\neg Ra$	$\wedge B, 5$
1,4	(7)	$\exists x \neg Rx$	$\exists E, 6$
1	(8)	$\neg Pa \rightarrow \exists x \neg Rx$	$\rightarrow E, \underline{4}, 7$
1,2	(9)	$\exists x \neg Rx$	$\exists B, 2, 8$

3. Die Aussage kann entweder meinen „Für jedes Ding gilt, dass es nicht F ist“, anders gesagt: „Kein Ding ist F“, formal: $\forall x \neg Fx$ bzw. $\neg \exists x Fx$ oder „Nicht jedes Ding ist F“, anders gesagt: „Einige Dinge sind nicht F“, formal $\neg \forall x Fx$ bzw. $\exists x \neg Fx$.

4. Das Theorem besagt: Es gibt einen Gegenstand, so dass, wenn überhaupt etwas A ist, es dieser Gegenstand ist. Der Beweis verläuft wie folgt:

	(1)	$\exists y Ay \vee \neg \exists y Ay$	SVD
2	(2)	$\exists y Ay$	A
3	(3)	Aa	A
3	(4)	$\exists y Ay \rightarrow Aa$	HA,3
3	(5)	$\exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\exists$E,4
	(6)	$Aa \rightarrow \exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\rightarrow$E,$\underline{3}$,5
2	(7)	$\exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\exists$B,2,6
	(8)	$\exists y Ay \rightarrow \exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\rightarrow$E,$\underline{2}$,7
9	(9)	$\neg \exists y Ay$	A
9	(10)	$\neg Aa \rightarrow \neg \exists y Ay$	HA,9
9	(11)	$\exists y Ay \rightarrow Aa$	KP,10
9	(12)	$\exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\exists$E,11
	(13)	$\neg \exists y Ay \rightarrow \exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	$\rightarrow$E,$\underline{9}$,12
	(14)	$\exists x(\exists y Ay \rightarrow Ax)$	KD,1,8,13

5. In einer der Voraussetzungen von Zeile (10) – in der Aussage in Zeile (3) – kommt a frei vor. $\exists$B ist deshalb nicht erlaubt.

Lösungen zu 2.7

1. (a) Pa
   (b) $\forall x \exists y Mxy$, mit Mxy = „x hat y zur Mutter“ (nicht „x ist Mutter von y“, denn nicht jeder *ist* eine Mutter!)
   (c) $\exists x \forall y\,[(Mx \wedge Ky) \wedge Hxy]$, mit Mx = „x ist eine Medizin“, Kx = „x ist eine Krankheit“ und Hxy = „x hilft gegen y“
   (d) $\forall x \exists y\,(Px \rightarrow Vxy)$, mit Px = „x ist Philosoph“ und Vxy = „x hat y zum Vorbild“
   (e) $\forall x \exists y\, Uxy$, mit Uxy = „x hat y zur Ursache“ oder – wenn *eine* betont ist – $\forall x Uxa$, mit a = ein nicht weiter Spezifizierbares
   (f) Gmn, mit Gxy = „x ist größer als y“, m = München und n = Nürnberg
   (g) Lfen, mit Lxyz = „x liegt zwischen y und z“ (= ein 3-stelliges Prädikat), f = Fürth, e = Erlangen, n = Nürnberg
   (h) $\neg \exists x Axp$, mit Axy = „x hat y das Auge ausgestochen“, p = Polyphem
   (i) Anp, mit Axy = „x hat y das Auge ausgestochen“, p = Polyphem, n = Niemand

2. $\neg \exists x Axm \vdash \neg Adm$, mit Axy = x ist älter als y, m = Moses, d = David

1	(1)	$\neg \exists x Axm$	A
2	(2)	Adm	A
2	(3)	$\exists x Axm$	$\exists$E, 2
1, 2	(4)	$\exists x Axm \wedge \neg \exists x Axm$	$\wedge$E, 3, 1
1	(5)	$Adm \rightarrow (\exists x Axm \wedge \neg \exists x Axm)$	$\rightarrow$E, $\underline{2}$, 4
1	(6)	$\neg Adm$	$\neg$E, 5

Lösungen zu 2.9

1. Me, mit „Mx“ für „x hat einen Mond“ und „e“ für „die Erde“

2. $\exists x[Ex \wedge \forall y(Ey \rightarrow x = y)]$, mit „Ex“ für „x ist ein natürlicher Erdtrabant“ (demnach hätte (a) auch als $\exists x Ex$ dargestellt werden können)

3. $(Mp \wedge Md) \wedge \forall x[Mx \rightarrow (x = p) \vee (x = d)]$, mit „p“ für „Phobos“, „d“ für „Deimos“ und „Mx“ für „x ist ein Marsmond“

4. Da

5. $\forall x \forall y \forall z(Uy \land (Gxyz \land x \neq z) \to Fxy)$, mit „Ux“ für „x ist eine Grube“, „Gxyz“ für „x gräbt y für z“ und „Fxy“ für „x fällt in y“

6. $\forall x \forall y \forall z[(Dxy \land Dxz) \land y \neq z \to (Hxy \land Lxz \nleftrightarrow Zxy \land Vxz)]$, mit „Dxy“ für „x dient y“, „Hxy“ für „x hasst y“, „Lxy“ für „x liebt y“, „Zxy“ für „x hält zu y“ und „Vxy“ für „x verachtet y“

Lösungen zu 3.3

1. FESTINO = 2-EIO: „Kein Potsdamer ist Mitglied. Einige Studierende sind Mitglied. Also: Einige Studierende sind keine Potsdamer.“ Daraus wird FERIO durch *conversio simplex* der ersten Prämisse.

1	(1)	$\forall x(Px \to \neg Mx)$	A
2	(2)	$\exists x(Sx \land Mx)$	A
1	(3)	$Pa \to \neg Ma$	$\forall$B, 1
4	(4)	$Sa \land Ma$	A
4	(5)	Ma	$\land$B,4
4	(6)	$\neg\neg Ma$	SP,5
1, 4	(7)	$\neg Pa$	MT,3,6
4	(8)	Sa	$\land$B,4
1, 4	(9)	$Sa \land \neg Pa$	$\land$E, 8, 7
1, 4	(10)	$\exists x(Sx \land \neg Px)$	$\exists$E,9
1	(11)	$Sa \land Ma \to \exists x(Sx \land \neg Px)$	$\to$E, $\underline{4}$, 10
1, 2	(12)	$\exists x(Sx \land \neg Px)$	$\exists$B, 2, 11

DISAMIS = 3-IAI: „So manch ein Metaphysiker ist Platonist. Alle Metaphysiker sind letztendlich Scholastiker. Demzufolge gibt es scholastische Platonisten.“ Durch *conversio simplex* von erster Prämisse und Konklusion sowie Vertauschen der Prämissen wird daraus DARII.

CAMESTROS = 2-AEO: „Alle Parteimitglieder sind Marxisten. Kein Sozialist ist Marxist. Ergo: Einige Sozialisten sind nicht in der Partei.“ Da CAMESTR<u>E</u>S auf CELARENT zurückgeführt werden kann (vertauschen der Prämissen, einfache Umkehrung der E-Prämisse sowie der Konklusion), muss auch die dazu subalterne Form CAMESTR<u>O</u>S gültig sein.

2. (a) 4-OEO: ungültig aufgrund von RII der Distributionsregeln: *Dialektiker* kommt in der Konklusion, nicht aber in den Prämissen distribuiert vor.

   (b) 1-OAI: ungültig aufgrund von RI: Der Mittelterm *Dialektiker* ist in beiden Prämissen nicht distribuiert.

(c) 2-EAE = gültig; Rückführung durch *conversio simplex* der ersten Prämisse.

3. (a) nicht möglich
   (b) *simplex:* FiD
   (c) *per accidens:* FiH
   (d) *simplex:* FeH

4. 2-EAO: Kein Philosoph ist Metaphysiker. Alle Scotisten sind Metaphysiker. Ergo: Einige Scotisten sind keine Philosophen.

   1-IOO: Manche Metaphysiker sind Philosophen. Manche Scotisten sind keine Metaphysiker. Ergo: Einige Scotischen sind keine Philosophen.

   4-AIO: Philosophen sind Metaphysiker. Es gibt Metaphysiker, die Scotisten sind. Ergo: Es gibt Scotisten, die keine Philosophen sind.

   5-IAE: Es gibt keine 5. Figur!

5. Die beiden Quadrate haben folgende Gestalt

Jeder Mensch ist vernünftig.		Kein Mensch ist vernünftig.
	$\boxtimes$	
Manche Menschen sind vernünftig.		Nicht jeder Mensch ist vernünftig.

Der Raum ist voll.		Der Raum ist leer.
	$\boxtimes$	
Der Raum ist nicht leer.		Der Raum ist nicht voll.

6. Die Gültigkeit des Schlusses kann mit den Mitteln der Syllogistik nur sehr umständlich und unter Zuhilfenahme von Zusatzannahmen gezeigt werden. Im KNS stellt die Ableitung dagegen kein Problem dar (nachfolgend „Px“ für „x ist ein Pferd“, „Tx“ für „x ist ein Tier“ und „Kxy“ für „x ist der Kopf von y“):

1	(1)	$\forall x(Px \to Tx)$	A
2	(2)	$\exists y(Py \land Kay)$	A
3	(3)	$Pb \land Kab$	A
3	(4)	Pb	$\land$B,3
3	(5)	Kab	$\land$B,3
1	(6)	$Pb \to Tb$	$\forall$B,1
1,3	(7)	Tb	$\to$B,6,4
1,3	(8)	$Tb \land Kab$	$\land$E,7,5
1,3	(9)	$\exists y(Ty \land Kay)$	$\exists$E,8
1	(10)	$Pb \land Kab \to \exists y(Ty \land Kay)$	$\to$E,$\underline{3}$,9
1,2	(11)	$\exists y(Ty \land Kay)$	$\exists$B,2,10
1	(12)	$\exists y(Py \land Kay) \to \exists y(Ty \land Kay)$	$\to$E,$\underline{2}$,11
1	(13)	$\forall x[\exists y(Py \land Kxy) \to \exists y(Ty \land Kxy)]$	$\forall$E,12

7. 1. Schluss: Mit den drei Prämissen (1) HaA, (2) HaB und (3) KaA wird geschlossen auf KaB, wobei Hx = „x ist ein Hund“, Ax = „x ist ein Haustier“, Bx = „x bellt“ und Kx = „x ist eine Katze“. Diesen Schluss könnte man so rekonstruieren, dass zunächst mit (1) und (2) geschlossen wird auf AaB, um dann mit dieser Konklusion als erster Prämisse und KaB als zweiter Prämisse nach BARBARA auf KaB zu schließen. Der erste Schluss hätte die Form 3-AAA = $\forall x\,(Hx \rightarrow Ax)$, $\forall x\,(Hx \rightarrow Bx) \vdash \forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$, so dass die Ableitung wohl so aussehen müsste:

1	(1)	$\forall x\,(Hx \rightarrow Ax)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Hx \rightarrow Bx)$	A
1	(3)	$Ha \rightarrow Aa$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Ha \rightarrow Ba$	$\forall$B, 2
5	(5)	Ha	A
1, 5	(6)	Aa	$\rightarrow$B, 3, 5
2, 5	(7)	Ba	$\rightarrow$B, 4, 5
8	(8)	$\exists x Hx$	A
1, 2, 5	(9)	$Aa \wedge Ba$	$\wedge$E, 6, 7
1, 2, 5	(10)	Ba	$\wedge$B, 9
1, 2, 5	(11)	$Aa \rightarrow Ba$	HA, 10
1, 2	(12)	$Ha \rightarrow (Aa \rightarrow Ba)$	$\rightarrow$E, $\underline{5}$, 11
1, 2, 8	(13)	$Aa \rightarrow Ba$	$\exists$B, 8, 12
1, 2, 8	(14)	$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$	$\forall$E, 13

Die Voraussetzung von 8 in (14) könnte man als Existenzpräsupposition zugestehen; der eigentliche Fehler liegt in Zeile (13): Die dort vorgenommene $\exists$B ist nicht erlaubt, da a in dem Ausdruck $Aa \rightarrow Ba$ frei vorkommt. Korrekt hätte man z. B. nach DISAMIS schließen können: $\exists x\,(Hx \wedge Bx)$, $\forall x\,(Hx \rightarrow Ax) \vdash \exists x\,(Ax \wedge Bx)$

1	(1)	$\exists x\,(Hx \wedge Bx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Hx \rightarrow Ax)$	A
2	(3)	$Ha \rightarrow Aa$	$\forall$B, 2
4	(4)	$Ha \wedge Ba$	A
4	(5)	Ha	$\wedge$B, 4
2, 4	(6)	Aa	$\rightarrow$B, 3, 5
4	(7)	Ba	$\wedge$B, 4
2, 4	(8)	$Ha \wedge Ba$	$\wedge$E, 6, 7
2, 4	(9)	$\exists x(Hx \wedge Bx)$	$\exists$E, 8
2	(10)	$(Ha \wedge Ba) \rightarrow \exists x(Ax \wedge Bx)$	$\rightarrow$E, $\underline{4}$, 9
1, 2	(11)	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	$\exists$E, 1, 10

Nicht korrekt wäre hier gewesen:

2	(9)	$(\mathrm{Ha} \wedge \mathrm{Ba}) \to (\mathrm{Aa} \wedge \mathrm{Ba})$	$\to$E, <u>4</u>, 8
1, 2	(10)	$\mathrm{Aa} \wedge \mathrm{Ba}$	$\exists$B, 1, 9
1, 2	(11)	$\exists x\,(\mathrm{Ax} \wedge \mathrm{Bx})$	$\exists$E, 10

<u>2. Schluss</u>: Wie gesagt BARBARA, also $\forall x\,(\mathrm{Ax} \to \mathrm{Bx}), \forall x\,(\mathrm{Kx} \to \mathrm{Ax}) \vdash \forall x\,(\mathrm{Kx} \to \mathrm{Bx})$.

<u>3. Schluss</u>: 2-AAA $= \forall x\,(\mathrm{Ax} \to \mathrm{Sx}), \forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Sx}) \vdash \forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Ax})$, mit Ax = „x ist Athener", Sx = „x ist sterblich" und Ex = „x ist Einwohner von Piräus". Als Fehler naheliegend wäre eine falsch angewendete Kontraposition:

1	(1)	$\forall x\,(\mathrm{Ax} \to \mathrm{Sx})$	A
2	(2)	$\forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Sx})$	A
1	(3)	$\mathrm{Aa} \to \mathrm{Sa}$	$\forall$B, 1
2	(4)	$\mathrm{Ea} \to \mathrm{Sa}$	$\forall$B, 2
1	(5)	$\mathrm{Sa} \to \mathrm{Aa}$	KP, 3
1, 2	(6)	$\mathrm{Ea} \to \mathrm{Aa}$	KS, 4, 5
1, 2	(7)	$\forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Ax})$	$\forall$E, 6

Diffiziler – weil hier kein Fehler, sondern nur eine zusätzliche Annahme gemacht wird – wäre dieser Schluss:

1	(1)	$\forall x\,(\mathrm{Ax} \to \mathrm{Sx})$	A
2	(2)	$\forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Sx})$	A
3	(3)	$\forall x \neg \mathrm{Sx}$	A
2	(4)	$\mathrm{Ea} \to \mathrm{Sa}$	$\forall$B, 2
3	(5)	$\neg \mathrm{Sa}$	$\forall$B, 3
2, 3	(6)	$\neg \mathrm{Ea}$	MT, 4, 5
2, 3	(7)	$\neg \mathrm{Aa} \to \neg \mathrm{Ea}$	HA, 6
2, 3	(8)	$\mathrm{Ea} \to \mathrm{Aa}$	KP, 7
1, 2, 3	(9)	$(\mathrm{Ea} \to \mathrm{Aa}) \wedge \forall x\,(\mathrm{Ax} \to \mathrm{Sx})$	$\wedge$E, 8, 1
1, 2, 3	(10)	$\mathrm{Ea} \to \mathrm{Aa}$	$\wedge$B, 9
1, 2, 3	(11)	$\forall x\,(\mathrm{Ex} \to \mathrm{Ax})$	$\forall$E, 10

<u>4. Schluss</u>: Ebenfalls 2-AAA, mit Mx = „x ist ein Mensch", Sx = „x stammt von niederen Formen des Lebens ab" und Ax = „x ist ein großer Menschenaffe" also AaS, MaS $\vdash$ MaA; Ableitung dementsprechend wie oben.

<u>5. Schluss</u>: Bei D(x) = „x ist denkbar", V(x) = „x ist vollkommen" und E(x) = „x existiert" ergäbe sich die folgende Ableitung, wobei Zeile (3) die angesprochene Verwechslung von Denken und Realität formuliert:

1	(1)	$D(\exists x V(x))$	A
2	(2)	$\forall x[\,V(x) \to E(x)\,]$	A
3	(3)	$\forall x[\,D(x) \to x\,]$	A
2	(4)	$V(g) \to E(g)$	$\forall$B, 2
3	(5)	$D(\exists x V(x)) \to \exists x V(x)$	$\forall$B, 3
1, 3	(6)	$\exists x V(x)$	$\to$B, 1, 5
1, 2, 3	(7)	$E(g)$	$\exists$B, 6, 4

Würde man in Zeile (1) D(V(g)) schreiben, mit g = Gott, dann hätte man das zu Beweisende bereits angenommen. Abgesehen davon, dass man hier auf gleicher Ebene über Gegenstände und über Sachverhalte quantifiziert, liegt der eigentliche Fehler in der Verletzung der Variablenbedingung in Zeile (7). Dass es dazu kommen muss, wenn man Existenz als ein Prädikat erster Stufe behandelt, verdeutlicht die übliche Vermeidungsstrategie dieses Fehlers:

7	(7)	$V(g)$	A
2, 7	(8)	$E(g)$	$\to$B, 4, 7
2, 7	(9)	$\exists x E(x)$ **!!!**	$\exists$E, 8

<u>6. Schluss</u>: Gaunilo argumentiert: (1) $D(\exists x I(x))$, (2) $\forall x[\,I(x) \to E(x)\,]$, wobei Ix = „x ist eine Insel“.

<u>7. Schluss</u>: Mit Kx = „x ist ein Kreter“, Lx = „x lügt“ und e = Epimenides ergibt sich folgende Ableitung, wobei aus Le folgt: $\neg\forall x\,(Kx \to Lx)$.

1	(1)	$\forall x\,(Kx \to Lx)$	A
2	(2)	Ke	A
1	(3)	$Ke \to Le$	$\forall$B, 1
1, 2	(4)	Le	$\to$B, 3, 2

Tit 1, 12–13: „Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche. Dieses Zeugnis ist wahr.“

<u>8. Schluss</u>: Mit Hx = „x hält Epimenides für einen Lügner“, Vx = „x verlässt sich auf die Kreter“ und Kx = „x ist ein Kreter“ ergibt sich 2-AEE = CAMESTRES:

1	(1)	$\forall x\,(Hx \to Vx)$	A
2	(2)	$\forall x\,(Kx \to \neg Vx)$	A
1	(3)	$Ha \to Va$	$\forall$B, 1
2	(4)	$Ka \to \neg Va$	$\forall$B, 2
1	(5)	$\neg Va \to \neg Ha$	KP, 3
1, 2	(6)	$Ka \to \neg Ha$	KS, 4, 5
1, 2	(7)	$\forall x\,(Kx \to \neg Hx)$	$\forall$E, 6

<u>9. Schluss</u>: $\exists x\,(\neg Gx \wedge \neg Fx)$, $\exists x\,(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$. Zur Ableitung ist nur die 2. Prämisse erforderlich, wobei Fx = „x ist Fundamentalist“ und Gx = „x glaubt, Gott hat die Welt in sieben Tagen erschaffen“; $\forall$E in (6) ist freilich nicht erlaubt.

1	(1)	$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$	A
2	(2)	$Fa \wedge Ga$	A
2	(3)	Ga	$\wedge$B, 2
2	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	HA, 3
2	(5)	$\neg Ga \rightarrow \neg Fa$	KP, 4
2	(6)	$\forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$	$\forall$E, 5
	(7)	$(Fa \wedge Ga) \rightarrow \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$	$\rightarrow$E, <u>2</u>, 6
1	(8)	$\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$	$\exists$B, 1, 7

Lösungen zu 3.5

1. Folgendes gilt <u>nicht</u>:

   (i) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \vdash \exists x(Sx \wedge Px)$

   (ii) $\forall x(Sx \rightarrow \neg Px) \vdash \exists x(Sx \wedge \neg Px)$

   (iii-a) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \vdash \neg\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)$

   (iii-b) $\forall x(Sx \rightarrow \neg Px) \vdash \neg\forall x(Sx \rightarrow Px)$

   (iv-a) $\neg\exists x(Sx \wedge Px) \vdash \exists x(Sx \wedge \neg Px)$

   (iv-b) $\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px) \vdash \exists x(Sx \wedge Px)$

   Damit bleiben allein die Diagonalen des logischen Quadrates bestehen mit (i) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \nleftrightarrow \exists x(Sx \wedge \neg Px)$ und (ii) $\forall x(Sx \rightarrow \neg Px) \nleftrightarrow \exists x(Sx \wedge Px)$.

2. CESARE:

1	(1)	$\neg\exists x(Px \wedge Mx)$	A
2	(2)	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Mx) \wedge \exists x(Sx \wedge Mx)$	A
1	(3)	$\forall x\neg(Px \wedge Mx)$	QD,1
2	(4)	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Mx)$	$\wedge$B,2
2	(5)	$\forall x\neg(Sx \wedge \neg Mx)$	QD,4
1	(6)	$\neg(Pa \wedge Ma)$	$\forall$B,3
2	(7)	$\neg(Sa \wedge \neg Ma)$	$\forall$B,5
1	(8)	$\neg Pa \vee \neg Ma$	DM,6
2	(9)	$\neg Sa \vee \neg\neg Ma$	DM,7
10	(10)	$\exists x(Sx \wedge Px)$	A
11	(11)	$Sa \wedge Pa$	A
11	(12)	Sa	$\wedge$B,11
11	(13)	Pa	$\wedge$B,11
11	(14)	$\neg\neg Pa$	SP,13
1,11	(15)	$\neg Ma$	$\vee$B,8,14
11	(16)	$\neg\neg Sa$	SP,12
2,11	(17)	$\neg\neg Ma$	$\vee$B,9,16
1,2,11	(18)	$\neg Ma \wedge \neg\neg Ma$	$\wedge$E,15,17
1,2	(19)	$Sa \wedge Pa \rightarrow \neg Ma \wedge \neg\neg Ma$	$\rightarrow$E,$\underline{11}$,18
1,2,10	(20)	$\neg Ma \wedge \neg\neg Ma$	$\exists$B,10,19
1,2	(21)	$\exists x(Sx \wedge Px) \rightarrow \neg Ma \wedge \neg\neg Ma$	$\rightarrow$E,$\underline{10}$,20
1,2	(22)	$\neg\exists x(Sx \wedge Px)$	$\neg$E,21

DISAMIS: $\exists x(Mx \wedge Px), \neg\exists x(Mx \wedge \neg Sx) \wedge \exists x(Mx \wedge Sx) \vdash \exists x(Sx \wedge Px)$

CALEMES: $\neg\exists x(Px \wedge \neg Mx) \wedge \exists x(Px \wedge Mx), \neg\exists x(Mx \wedge Sx) \vdash \neg\exists x(Sx \wedge Px)$

3. (i) Alles Natürliche ist vollkommen; (ii) nichts, was natürlich ist, ist vollkommen; (iii) es gibt Dinge, die von Natur aus vollkommen sind; (iv) es gibt Vollkommenes, das nicht natürlich ist.

Konversionen:	N^+aV^+	$\vdash$	V^+iN^+
	NeV	$\vdash$	VeN
	NeV	$\vdash$	VoN
	N^+iV^+	$\vdash$	V^+iN^+

Kontrapositionen:	NeV	$\vdash$	$V'oN'$
	VoN	$\vdash$	$N'oV'$

Lösungen zu 4.1.2

1. (a) $P\bar{Q}\bar{R} \vee \bar{P}QR \vee \bar{P}Q\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}R$

(b) $PQ \vee \bar{P}Q \vee \bar{P}\bar{Q}$

2. (a) $(\bar{A}\vee B\vee C)(A\vee\bar{B}\vee\bar{C})(A\vee\bar{B}\vee C)(A\vee B\vee\bar{C})(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})$

   (b) $A \vee \bar{B}$

3. (a) Die VDNF enthält keine Disjunktionsglieder der Form A und $\neg A$. Somit ist der Ausdruck keine formale Wahrheit.

(1)	$A \vee BC$	
(2)	$AB \vee A\bar{B} \vee BC$	ES
(3)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee BC$	ES
(4)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee BCA \vee BC\bar{A}$	ES
(5)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC \vee \bar{A}BC$	KK,KG
(6)	$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}BC$	IP

   (b) Die DNF in Zeile (3) enthält P und $\bar{P}$ als Disjunktionsglieder; somit ist der Ausdruck formal wahr.

(1)	$P \to (Q \to P)$	
(2)	$\bar{P} \vee (\bar{Q} \vee P)$	SA
(3)	$\bar{P} \vee \bar{Q} \vee P$	KK
(4)	$\bar{P}Q \vee \bar{P}\bar{Q} \vee \bar{Q}P \vee \bar{Q}\bar{P} \vee PQ \vee P\bar{Q}$	ES
(5)	$\bar{P}Q \vee \bar{P}\bar{Q} \vee P\bar{Q} \vee \bar{P}\bar{Q} \vee PQ \vee P\bar{Q}$	KG
(6)	$\bar{P}Q \vee \bar{P}\bar{Q} \vee P\bar{Q} \vee PQ$	IP

4. Die VDNF ist $A\bar{B}$, die VKNF ist $(A\vee B)(A\vee\bar{B})(\bar{A}\vee\bar{B})$; der zugehörige Wahrheitswertverlauf ist $<0100>$. Die VKNF ergibt sich wie folgt:

(1)	$A \wedge \neg B$	
(2)	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg B$	ES
(3)	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A)$	ES
(4)	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$	KG
(5)	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$	IP

Lösungen zu 4.1.4

1. $\exists x \exists y(Mx \wedge My) \dashv\vdash \exists x Mx$

$\vdash$:	1	(1)	$\exists x \exists y(Mx \wedge My)$	A
	1	(2)	$\exists x(Mx \wedge \exists y My)$	PG,1
	1	(3)	$\exists x Mx \wedge \exists y My$	PG,2
	1	(4)	$\exists x Mx$	$\wedge$B,3

$\dashv$:	1	(1)	$\exists x Mx$	A
	1	(2)	$\exists y My$	UB,1
	1	(3)	$\exists x Mx \wedge \exists y Mx$	$\wedge$E,1,2
	1	(4)	$\exists x(Mx \wedge \exists y My)$	PG,3
	1	(5)	$\exists x \exists y(Mx \wedge My)$	PG,4

2. (a) Man beachte, dass eine Regelanwendung nur einmal notiert werden muss, auch wenn sie in der Zeile mehrfach angewendet wird:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg\forall xPxa \leftrightarrow \exists xQxx & \\
(2) & (\neg\forall xPxa \to \exists yQyy) \land (\exists wQww \to \neg\forall zPza) & \text{UB,}\leftrightarrow\text{B} \\
(3) & (\forall xPxa \lor \exists yQyy) \land (\neg\exists wQww \lor \exists z\neg Pza) & \text{SA,}\neg\neg\text{B,QD} \\
(4) & \forall x(Pxa \lor \exists yQyy) \land (\forall w\neg Qww \lor \exists z\neg Pza) & \text{PG,QD} \\
(5) & \forall x[\exists y(Pxa \lor Qyy) \land (\forall w\neg Qww \lor \exists z\neg Pza)] & \text{PG} \\
(6) & \forall x\exists y[(Pxa \lor Qyy) \land \forall w(\neg Qww \lor \exists z\neg Pza)] & \text{PG} \\
(7) & \forall x\exists y\forall w[(Pxa \lor Qyy) \land \exists z(\neg Qww \lor \neg Pza)] & \text{PG} \\
(8) & \forall x\exists y\forall w\exists z[(Pxa \lor Qyy) \land (\neg Qww \lor \neg Pza)] & \text{PG}
\end{array}$$

(b) Auch hier wird PG bei dreifacher Anwendung in Zeile (3) nur einmal notiert:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \exists x(Px \lor \forall yZyx) \land \exists x(Hx \lor \neg\exists zFzyx) & \\
(2) & \exists x[(Px \lor \forall yZyx) \land \exists w(Hw \lor \forall z\neg Fzaw)] & \text{UB,PG,QD} \\
(3) & \exists x\exists w[\forall y(Px \lor Zyx) \land \forall z(Hw \lor \neg Fzaw)] & \text{PG} \\
(4) & \exists x\exists w\forall y[(Px \lor Zyx) \land \forall z(Hw \lor \neg Fzaw)] & \text{PG} \\
(5) & \exists x\exists w\forall y\forall z[(Px \lor Zyx) \land (Hw \lor \neg Fzaw)] & \text{PG}
\end{array}$$

3. Der DNF-Kern ist auch eine KNF mit nur einem Konjunktionsglied:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \forall x(\exists yPxy \to \exists yQay) & \\
(2) & \forall x(\exists yPxy \to \exists zQaz) & \text{UB} \\
(3) & \forall x(\neg\exists yPxy \lor \exists zQaz) & \text{SA} \\
(4) & \forall x(\forall y\neg Pxy \lor \exists zQaz) & \text{QD} \\
(5) & \forall x\forall y(\neg Pxy \lor \exists zQaz) & \text{PG} \\
(6) & \forall x\forall y\exists z(\neg Pxy \lor Qaz) & \text{PG}
\end{array}$$

4. Ockham präsupponiert in Urteilen der Form SaP die Existenz von Dingen, die S sind:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \forall x(Sx \to Px) \land \exists xSx & \\
(2) & \forall x(Sx \to Px) \land \exists ySy & \text{UB} \\
(3) & \forall x(\neg Sx \lor Px) \land \exists ySy & \text{SA} \\
(4) & \forall x\neg(Sx\neg Px) \land \exists ySy & \text{DM,}\neg\neg\text{B} \\
(5) & \forall x(\neg(Sx\neg Px) \land \exists ySy) & \text{PG} \\
(6') & \forall x\exists y(\overline{Sx\overline{P}x} \land Sy) & \text{PG} \\
(6) & \forall x[\overline{Sx\overline{P}x} \land (\exists ySyPa \lor \exists ySy\overline{P}a)] & \text{ES} \\
(7) & \forall x[\overline{Sx\overline{P}x} \land \exists w(\exists ySyPw \lor \exists zSz\overline{P}w)] & \text{UB,}\exists\text{E} \\
(8) & \forall x\exists w[\overline{Sx\overline{P}x} \land \exists y(SyPw \lor \exists zSz\overline{P}w)] & \text{PG} \\
(9) & \forall x\exists w\exists y[\overline{Sx\overline{P}x} \land \exists z(SyPw \lor Sz\overline{P}w)] & \text{PG} \\
(10) & \forall x\exists w\exists y\exists z[\overline{Sx\overline{P}x} \land (SyPw \lor Sz\overline{P}w)] & \text{PG}
\end{array}$$

Mit Zeile 6' würde man in eine Sackgasse geraten, da in einer VDNF ja jede Variable in jedem Disjunktionsglied *genau einmal* vorkommen muss. Der deshalb nun nötige Erweiterungssatz ist aber definitionsgemäß nur auf Aussagen anwendbar, so dass man damit in Zeile 5 ansetzen muss. Spätestens in Zeile 10 aber merkt man, dass die Konstruktion auf diesem Wege äußerst aufwendig wird. Es empfiehlt sich deshalb, eine Tabelle wie im Skript 3.4.1 anzulegen und daraus die VDNF abzulesen:

$\exists w(\overline{S}w\overline{P}w)\neg\exists x(Sx\overline{P}x)\exists y(SyPy)\exists z(\overline{S}zPz) \vee$

$\exists w(\overline{S}w\overline{P}w)\neg\exists x(Sx\overline{P}x)\exists y(SyPy)\neg\exists z(\overline{S}zPz) \vee$

$\neg\exists w(\overline{S}w\overline{P}w)\neg\exists x(Sx\overline{P}x)\exists y(SyPy)\exists z(\overline{S}zPz) \vee$

$\neg\exists w(\overline{S}w\overline{P}w)\neg\exists x(Sx\overline{P}x)\exists y(SyPy)\neg\exists z(\overline{S}zPz)$

Um sämtliche Qunatoren nach links verschieben zu können, muss nun noch umbenannt werden, etwa so:

$\exists a(\overline{S}a\overline{P}a)\neg\exists b(Sb\overline{P}b)\exists c(ScPc)\exists d(\overline{S}dPd) \vee$

$\exists e(\overline{S}e\overline{P}e)\neg\exists f(Sf\overline{P}f)\exists g(SgPg)\neg\exists h(\overline{S}hPh) \vee$

$\neg\exists i(\overline{S}i\overline{P}i)\neg\exists j(Sj\overline{P}j)\exists k(SkPk)\exists l(\overline{S}lPl) \vee$

$\neg\exists m(\overline{S}m\overline{P}m)\neg\exists n(Sn\overline{P}n)\exists o(SoPo)\neg\exists p(\overline{S}pPp)$

Daraus lässt sich nun die PNF problemlos konstruieren:

$\exists a\forall b\exists c\exists d\exists e\forall f\exists g\forall h\forall i\forall j\exists k\exists l\forall m\forall n\exists o\forall p(\overline{S}a\overline{P}a\overline{Sb\overline{P}b}ScPc\overline{S}dPd \vee$

$\overline{S}e\overline{P}e\overline{Sf\overline{P}f}SgPg\overline{\overline{S}hPh} \vee$

$\overline{\overline{S}i\overline{P}iSj\overline{P}j}SkPk\overline{S}lPl \vee$

$\overline{\overline{S}m\overline{P}m}\,\overline{Sn\overline{P}n}SoPo\overline{\overline{S}pPp})$

5. Mit Vxy für „x vertraut y“ und k für „Karl“ ergibt sich:

(1)	$\forall x\forall yVxy \to \exists zVkz$	
(2)	$\neg\forall x\forall yVxy \vee \exists zVkz$	SA
(3)	$\exists x\neg\forall yVxy \vee \exists zVkz$	QD
(4)	$\exists x\exists y\neg Vxy \vee \exists zVkz$	QD
(5)	$\exists x(\exists y\neg Vxy \vee \exists zVkz)$	PG
(6)	$\exists x\exists y(\neg Vxy \vee \exists zVkz)$	PG
(7)	$\exists x\exists y\exists z(\neg Vxy \vee Vkz)$	PG

6. (a) $\exists x\exists y\exists z\exists w\forall v[MxMyMzMw(x \neq y)(x \neq z)(x \neq w)(y \neq z)(y \neq w)(w \neq z)\neg(Mv(v \neq x)(v \neq y)(v \neq z)[v \neq w))]$

   bzw. $\exists x\exists y\exists z\exists w\forall v[MxMyMzMw\overline{Ixy}\,\overline{Ixz}\,\overline{Ixw}\,\overline{Iyz}\,\overline{Iyw}\,\overline{Iwz}\,\overline{Mv\overline{Ivx}\,\overline{Ivy}\,\overline{Ivz}\,\overline{Ivw}}]$.

   mit „Ixy“ für „x ist identisch mit y“, „Mx“ für „x ist ein Marsmond“

(b) $Em \wedge \exists x \exists y \exists z \exists w \forall v$
$[ExEyEzEw\overline{Ixy}\,\overline{Ixz}\,\overline{Ixw}\,\overline{Iyz}\,\overline{Iyw}\,\overline{Iwz}\,\overline{Ev\overline{Ivx}\,\overline{Ivy}\,\overline{Ivz}\,\overline{Ivw}}]$
oder $\exists x \exists y \exists z \exists w \forall v[m = x$
$\wedge ExEyEzEw\overline{Ixy}\,\overline{Ixz}\,\overline{Ixw}\,\overline{Iyz}\,\overline{Iyw}\,\overline{Iwz}\,\overline{Ev\overline{Ivx}\,\overline{Ivy}\,\overline{Ivz}\,\overline{Ivw}}]$,
mit „Ixy“ für „x ist identisch mit y“, „Ex“ für „x ist Evangelist“ und „m“ für „Matthäus“

7. $\neg\exists x Uxg \wedge \forall y \exists z(y \neq g \to Uzy)$, mit „Uxy“ für „x ist die Ursache von y“ und „g“ für „Gott“; oder: $\neg Ug \wedge \forall x(x \neq g \to Ux)$, mit „Ux“ für „x hat eine Ursache“

Lösungen zu 4.1.6

1. Dies sind zwei der möglichen Versionen:

(1)	$\forall x \exists y Axy \to \exists x \forall y Axy$	
(2)	$\neg\forall x \exists y Axy \vee \exists z \forall w Azw$	UB,SA
(3)	$\exists z(\exists x \neg\exists y Axy \vee \forall w Azw)$	PG,QD
(4)	$\exists z \forall w(\exists x \forall y \neg Axy \vee Azw)$	PG,QD
(5)	$\exists z \forall w \exists x(\forall y \neg Axy \vee Azw)$	PG
(6)	$\exists z \forall w \exists x \forall y(\neg Axy \vee Azw)$	PG
(7)	$\forall w \exists x \forall y(\neg Axy \vee Aaw)$	Skol
(8)	$\forall w \forall y(\neg Af(w)y \vee Aaw)$	Skol

(1)	$\forall x \exists y Axy \to \exists x \forall y Axy$	
(2)	$\neg\forall x \exists y Axy \vee \exists z \forall w Azw$	UB,SA
(3)	$\exists x \neg\exists y Axy \vee \exists z \forall w Azw$	QD
(4)	$\exists x(\forall y \neg Axy \vee \exists z \forall w Azw)$	PG,QD
(5)	$\exists x \exists z(\forall y \neg Axy \vee \forall w Azw)$	PG
(6)	$\exists x \exists z \forall y(\neg Axy \vee \forall w Azw)$	PG
(7)	$\exists x \exists z \forall y \forall w(\neg Axy \vee Azw)$	PG
(8)	$\forall y \forall w(\neg Aay \vee Abw)$	Skol

2. Zu Blatt 5, Aufgabe 1a:

(1)	$\forall x \exists y \forall w \exists z[(Pxa \vee Qyy) \wedge (\neg Qww \vee \neg Pza)]$	
(2)	$\forall x \forall w \exists z[(Pxa \vee Qf(x)f(x)) \wedge (\neg Qww \vee \neg Pza)]$	Skol
(3)	$\forall x \forall w[(Pxa \vee Qf(x)f(x)) \wedge (\neg Qww \vee \neg Pg(xw)a)]$	Skol

Zu Blatt 5, Aufgabe 1b:

(1)	$\exists x \exists w \forall y \forall z[(Px \vee Zyx) \wedge (Hw \vee \neg Fzaw)]$	
(2)	$\exists w \forall y \forall z[(Pb \vee Zyb) \wedge (Hw \vee \neg Fzaw)]$	Skol
(3)	$\forall y \forall z[(Pb \vee Zyb) \wedge (Hc \vee \neg Fzac)]$	Skol

Zu Blatt 5, Aufgabe 2:

(1)	$\forall x \forall y \exists z(\neg Pxy \vee Qaz)$	
(2)	$\forall x \forall y(\neg Pxy \vee Qaf(xy))$	Skol

Zu Blatt 5, Aufgabe 4:

(1)	$\exists x \exists y \exists z(\neg Vxy \vee Vkz)$	
(2)	$\neg Vab \vee Vkc$	Skol

Lösungen zu 4.2

1. (a) $\Diamond \exists x Ex \wedge \Diamond \neg \exists x Ex$, mit „Ex“ für „x ist ein natürlicher Erdtrabant“

   (b) $\Box[\exists x \exists y[(Mx \wedge My) \wedge (x \neq y)]]$, mit „Mx“ für „x ist ein Marsmond“

   (c) $\neg \Diamond[\exists x \exists y[((Px \wedge Py) \wedge (x \neq y)) \wedge \neg \exists z(Pz \wedge ((z \neq x) \wedge (z \neq y))]]$, mit „Px“ für „x ist ein natürlicher Trabant des Pluto“

   (d) $\Box(B \rightarrow D)$, mit „B“ für „Es blitzt“ und „D“ für „Es donnert“

   (e) $(\exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow y = x)$, mit „Gx“ für „x ist Gott“ (die angefügte Einzigkeitbedingung könnte auch weggelassen werden)

   (f) $\Diamond \forall x(Mx \rightarrow Sx) \wedge \Diamond \neg \forall x(Mx \rightarrow Sx)$, mit „Mx“ für „x ist ein Mensch“ und „Sx“ für „x ist sterblich“

2. (a) $\neg \Diamond \neg \Box p \vdash \Box p$, mit „p“ für „1+1=2“

1	(1)	$\neg \Diamond \neg \Box p$	A
1	(2)	$\Box \Box p$	MD,1
1	(3)	$\Box p$	$\Box$B,2

   (b) $\Box \neg \Diamond p \vdash \neg \Diamond \Diamond p$, mit „p“ für „1+1=3“

1	(1)	$\Box \neg \Diamond p$	A
1	(2)	$\neg \Diamond \neg \neg \Diamond p$	MD,1
1	(3)	$\neg \Diamond \Diamond p$	$\neg\neg$B,2

   (c) $\Box A \vee \Box B \vdash \Box(\Box A \vee \Box B)$

1	(1)	$\Box A \vee \Box B$	A
1	(2)	$\Box(\Box A \vee \Box B)$	$\Box$D,1

Anhang 1

A Grundregeln des KNS

Konjunktionseinführung (∧E)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P & & k_1,\dots,k_r & (k) & Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & Q & & l_1,\dots,k_s & (l) & P & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & P \wedge Q & \wedge\mathrm{E}, k, l & k_1,\dots,l_s & (m) & P \wedge Q & \wedge\mathrm{E}, l, k
\end{array}$$

Konjunktionsbeseitigung (∧B)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \wedge Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \wedge Q & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P & \wedge\mathrm{B}, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q & \wedge\mathrm{B}, k
\end{array}$$

Adjunktionseinführung (∨E)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P & & k_1,\dots,k_r & (k) & P & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P \vee Q & \vee\mathrm{E}, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q \vee P & \vee\mathrm{E}, k
\end{array}$$

Adjunktionsbeseitigung (∨B)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \vee Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \vee Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & \neg P & & l_1,\dots,l_s & (l) & \neg Q & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & Q & \vee\mathrm{B}, k, l & k_1,\dots,l_s & (m) & P & \vee\mathrm{B}, k, l
\end{array}$$

Negationseinführung (¬E) und Negationsbeseitigung (¬¬B)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow (Q \wedge \neg Q) & & k_1,\dots,k_r & (k) & \neg\neg P & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & \neg P & \neg\mathrm{E}, k & k_1,\dots,k_r & (l) & P & \neg\neg\mathrm{B}, k
\end{array}$$

Subjunktionseinführung (→E) und Subjunktionsbeseitigung (→B)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k & (k) & P & \mathrm{A} & k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\
l_1,\dots,l_s,\ k & (l) & Q & & l_1,\dots,l_s & (l) & P & \\
l_1,\dots,l_s & (m) & P \rightarrow Q & \rightarrow\mathrm{E}, \underline{k}, l & k_1,\dots,l_s & (m) & Q & \rightarrow\mathrm{B}, k, l
\end{array}$$

Äquivalenzeinführung (↔E)

$$\begin{array}{rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \rightarrow Q & \\
l_1,\dots,l_s & (l) & Q \rightarrow P & \\
k_1,\dots,l_s & (m) & P \leftrightarrow Q & \leftrightarrow\mathrm{E}, k, l
\end{array}$$

Äquivalenzbeseitigung (↔B)

$$\begin{array}{rcll@{\qquad\qquad}rcll}
k_1,\dots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & & k_1,\dots,k_r & (k) & P \leftrightarrow Q & \\
k_1,\dots,k_r & (l) & P \rightarrow Q & \leftrightarrow\mathrm{B}, k & k_1,\dots,k_r & (l) & Q \rightarrow P & \leftrightarrow\mathrm{B}, k
\end{array}$$

Kontravalenzeinführung ($\nleftrightarrow$E)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to \neg Q \\
l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg P \to Q \\
k_1,\ldots,l_s & (m) & P \nleftrightarrow Q \qquad \nleftrightarrow\mathrm{E}, k, l
\end{array}$$

Kontravalenzbeseitigung ($\nleftrightarrow$B)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q \\
k_1,\ldots,k_r & (l) & P \to \neg Q \quad \nleftrightarrow\mathrm{B}, k
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q \\
k_1,\ldots,k_r & (l) & \neg P \to Q \quad \nleftrightarrow\mathrm{B}, k
\end{array}$$

B Zulässige Regeln des KNS

Stabilitätsprinzip (SP)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_s & (k) & P \\
k_1,\ldots,k_s & (l) & \neg\neg P \quad \mathrm{SP}, k
\end{array}$$

Hypothetische Abschwächung (HA)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_s & (k) & P \\
k_1,\ldots,k_s & (l) & Q \to P \quad \mathrm{HA}, k
\end{array}$$

Kettenschluss (KS)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to Q \\
l_1,\ldots,l_s & (l) & Q \to R \\
k_1,\ldots,l_s & (m) & P \to R \quad \mathrm{KS}, k, l
\end{array}$$

Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to Q \\
l_1,\ldots,l_s & (l) & \neg Q \\
k_1,\ldots,l_s & (m) & \neg P \qquad\quad \mathrm{MT}, k, l
\end{array}$$

Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q \\
l_1,\ldots,l_r & (l) & P \\
k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg Q \qquad\quad \mathrm{DS}, k, l
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \nleftrightarrow Q \\
l_1,\ldots,l_r & (l) & Q \\
k_1,\ldots,l_r & (m) & \neg P \qquad\quad \mathrm{DS}, k, l
\end{array}$$

Kontraposition (KP)

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to Q \\
k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \to \neg P \quad \mathrm{KP}, k
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
k_1,\ldots,k_r & (k) & \neg Q \to \neg P \\
k_1,\ldots,k_r & (k) & P \to Q \qquad \mathrm{KP}, k
\end{array}$$

Konstruktives Dilemma (KD)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$P \vee Q$	
$l_1, \ldots, l_s$	(l)	$P \rightarrow R$	
$m_1, \ldots, m_s$	(m)	$Q \rightarrow R$	
$k_1, \ldots, m_s$	(n)	R	KD, k, l, m

De Morgansche Regeln (DM)

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg(P \wedge Q)$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg P \vee \neg Q$	DM, k

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg P \vee \neg Q$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg(P \wedge Q)$	DM, k

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg P \wedge \neg Q$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg(P \vee Q)$	DM, k

$k_1, \ldots, k_r$	(k)	$\neg(P \vee Q)$	
$k_1, \ldots, k_r$	(l)	$\neg P \wedge \neg Q$	DM, k

Anhang 2

A Prädikatenlogische Grundregeln des KNS

Allbeseitigung (∀B)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\forall xFx$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	Fa	$\forall B, k$

Alleinführung (∀E)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	Fa	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\forall xFx$	$\forall E, k$

Vorausgesetzt: I. x kommt in F nicht vor
II. a kommt nicht frei vor in: 1. k_1– k_r, 2. $\forall xFx$

Existenzeinführung (∃E)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	Fa	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\exists xFx$	$\exists E, k$

Existenzbeseitigung (∃B)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\exists xFx$	
$l_1,\ldots,l_r$	(l)	$Fa \rightarrow C$	
$k_1,\ldots,l_r$	(m)	C	$\exists B, k, l$

Vorausgesetzt: a kommt nicht frei vor in: 1. C, 2. k_1–l_r, 3. $\exists xFx$

B Zulässige Regeln: Quantorenlogische Dualität

(I)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\forall xAx$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg\exists x\neg Ax$	QD, k

(II)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg\exists x\neg Ax$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\forall xAx$	QD, k

(III)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\neg\forall x\neg Ax$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\exists xAx$	QD, k

(IV)

$k_1,\ldots,k_r$	(k)	$\exists xAx$	
$k_1,\ldots,k_r$	(l)	$\neg\forall x\neg Ax$	QD, k

(V)

$k_1, \ldots, k_r$ (k) $\neg\forall xAx$
$k_1, \ldots, k_r$ (l) $\exists x\neg Ax$ QD, k

(VI)

$k_1, \ldots, k_r$ (k) $\neg\exists xAx$
$k_1, \ldots, k_r$ (l) $\forall x\neg Ax$ QD, k

(VII)

$k_1, \ldots, k_r$ (k) $\exists x\neg Ax$
$k_1, \ldots, k_r$ (l) $\neg\forall xAx$ QD, k

(VIII)

$k_1, \ldots, k_r$ (k) $\forall x\neg Ax$
$k_1, \ldots, k_r$ (l) $\neg\exists xAx$ QD, k